

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 065

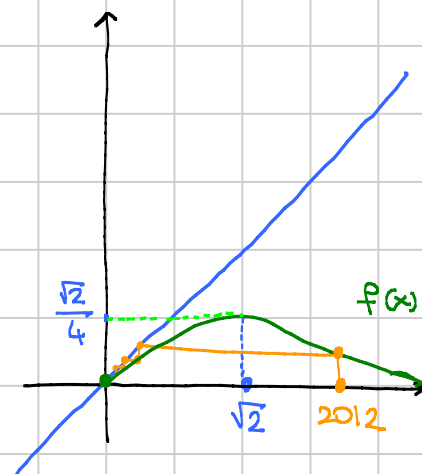
Titolo nota

15/11/2012

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}$ $a_0 = 2012$

$f(x) = \frac{x}{2+x^2}$ Studio rapido di funzione

Funzione dispari, $f(0) = 0$, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.



Zeri e segno! $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Devo studiare la posizione di $f(x)$ rispetto alla bisettrice, cioè risolvere

$$f(x) = x \quad \frac{x}{2+x^2} = x \Leftrightarrow x = 2x + x^3 \Leftrightarrow x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > x \quad \frac{x}{2+x^2} > x \Leftrightarrow \frac{x}{2+x^2} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2x - x^3}{2+x^2} > 0$$

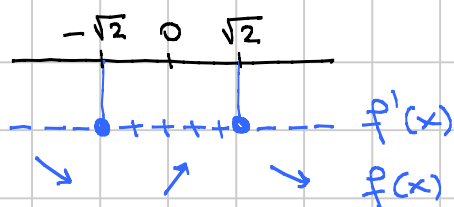
$$\Leftrightarrow -\frac{x^3 + x}{2+x^2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x \overset{>0}{(x^2+1)}}{\overset{>0}{2+x^2}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Ora so che per $x > 0$ la funzione $f(x)$ sta SOTTO x .

Studio la monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2+x^2-2x \cdot x}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $2-x^2$



[Esercizio: studiare la derivata 2ª (inutile ai fini della succ. per ricorrenza): ci aspettiamo $f''(x) < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f''(x) > 0$ in $(\alpha, +\infty)$ per un certo $\alpha > \sqrt{2}$ (e analogamente sugli $x < 0$)].

Idea proveniente dal grafico: $a_n \rightarrow 0$ decrescendo.

PIANO CON LA MONOTONIA

$$(i) a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(induzione banale)

$$(ii) a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

(debolm. decrescente + limitata inferior.)

$$(iv) l = 0.$$

Dim (ii) Uso ricorrenza + disequazione

Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè $\frac{a_n}{2+a_n^2} \leq a_n$, il che riconduce alla

disequazione $f(x) \leq x$, già risolta per posizionare il grafico. La soluzione è $x \geq 0$. Pertanto $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_n \geq 0$, che è vero per il p.to (i).

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza:

$$\begin{array}{c} \boxed{a_{n+1}} = \boxed{\frac{a_n}{2+a_n^2}} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ l = \frac{l}{2+l^2} \end{array}$$

Ritroviamo l'equazione $l = f(l)$, già risolta per posizionare i grafici.

L'unica soluzione sappiamo essere $l = 0$.

Oss. Non si poteva da subito usare "induzione + applico $f(x)$ " per dim. il p.to (ii) poiché $f(x)$ NON è crescente per $x \geq 0$.

Possibile rimedio: cambiare i p.ti (i) e (ii) del piano

$$(i\text{-NEW}) \quad 0 \leq a_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii\text{-NEW}) \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$$

Dim (i-NEW) Induzione: $\boxed{n=1}$ $0 \leq a_1 \leq \sqrt{2}$, cioè $0 \leq \frac{2012}{2+2012^2} \leq \sqrt{2}$ Ok

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{2}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (ora posso perché $f(x)$ è strett. cresc. in $[0, \sqrt{2}]$). Ottengo

$$f(0) \leq f(a_n) \leq f(\sqrt{2})$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \leq \sqrt{2} \quad \text{che è proprio la tesi.}$$

Dim (ii-NEW) Ora posso fare inclusione + applico $f(x)$

Passo base $\boxed{n=1}$ $a_2 \leq a_1 \dots$ bisogna calcolarli $\dots$

Passo induttivo: ... prendo l'ipotesi e applico f (posso perché ...) ...
e ottengo la tesi.

Oss. Potrei fare un piano con la distanza? Proviamo... $du = |a_n|$

(i) $0 \leq a_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$

(Esattamente come sopra)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1 \quad \forall n \geq 1$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, quindi anche $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (ii) $\sup \{ |f'(x)| : x \in [0, \sqrt{2}] \} = \sup \left\{ \left| \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} \right| : x \in [0, \sqrt{2}] \right\}$

$= \sup \left\{ \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} : x \in [0, \sqrt{2}] \right\}$ ↗ inutile in quanto è roba ≥ 0 nell'intervallo

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (devo prendere il num. max possibile $\leadsto 2$ e il denominatore min. possibile $\leadsto 4$)
(in alternativa si può studiare la funzione $\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$)

Ora sappiamo che $f(x)$ è lip. con costante $\frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$.

$$d_{n+1} = \underbrace{|a_{n+1} - 0|}_{\text{def.}} = \underbrace{|f(a_n) - f(0)|}_{\text{riem.}} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Lip}} |a_n - 0| = \frac{1}{2} d_n$$

Dim (iii) Induzione a partire da (ii): $n=1$: $d_1 \leq (\frac{1}{2})^0 d_1$ ok

Passo induttivo: Ipotesi: $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1$ Tesi: $d_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_1$

Dim: $d_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pto } (i_i)}}{\leq} \frac{1}{2} d_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ipotesi} \\ \text{multi. per } \frac{1}{2}}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_1 \quad \text{che \u00e9 la tesi}$

Dim. (iv) Solita con i carabinieri.

Oss. Studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Occhio: a_n è data dalla ricorrenza, quindi NON c'è una formula esplicita !!!

Sappiamo che $a_n \rightarrow 0$, quindi c'è la cond. nec., quindi la serie potrebbe convergere.

Osserviamo che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (banale variante del p.to c)), quindi posso applicare il rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{2 + a_n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1, \text{ quindi la serie converge.}$$

$\downarrow$
a_{n+1} dalla
ricorrenza

— 0 — 0 —