

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 064

Titolo nota

14/11/2012

Successioni spiraleggianti: metodo delle 2 sottosuccessioni

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{7}{2a_n + 5} \quad a_0 = 0.$

Idea! Le 2 sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone.

PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) a_{2n} è debolmente crescente, a_{2n+1} è debolmente decrescente

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

(iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

(iv) $l = m = 1$

Questo basta per concludere che $a_n \rightarrow 1$ globalmente.

Dim (i) Induzione esattamente come prima.

Dim (ii) Quella di prima: per induzione applicando 2 volte $f(x)$ dopo aver osservato che $f(x)$ è decrescente nella zona data dal p.to (i)

Dim. (iii) a_{2n} è deb. crescente e limitata superiormente (da 1 o da $\frac{7}{5}$)

Quindi $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}.$

a_{2n+1} è deb. decrescente e limitata inferiormente (da 0 o da 1)

Quindi $a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

Dim. (iv) Scrivo la ricorrenza in versione pari e versione dispari.

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+1} & = & \frac{7}{2a_{2n} + 5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \frac{7}{2l + 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+2} & = & \frac{7}{2a_{2n+1} + 5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{7}{2m + 5} \end{array}$$

Una volta trovato una singola equazione in l , ora trovo 2 equazioni in m ed l . Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{7}{2l+5} \\ l = \frac{7}{2m+5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2ml + 5m &= 7 & \text{Sottraggo e ottengo } 5(m-l) &= 0, \\ 2ml + 5l &= 7 & \text{cioè } m=l, \text{ quindi torno a} \end{aligned}$$

$$l = \frac{7}{2l+5} \quad \text{da cui come prima} \quad l = \frac{7}{2} \quad \text{incompatibile con p.to ci)}$$

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{7}{5a_n+2} \quad a_0 = 0$

$$f(x) = \frac{7}{5x+2}$$

$f(x) = x$ ha come soluzioni $x=1$ più una solus. negativa

Piano con la distanza

$$d_n = |a_n - 1| \quad (i) \quad 0 \leq a_n \leq \frac{7}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii) e (iv) come sempre

Tutto sta a trovare c ...

1° modo

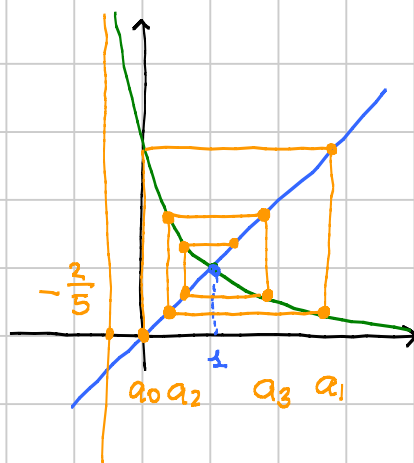
$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{7}{5a_n+2} - 1 \right| = \frac{|7-5a_n-2|}{|5a_n+2|} = \frac{5|1-a_n|}{|5a_n+2|} = \frac{5}{|5a_n+2|} d_n$$

al max può arrivare a $\frac{5}{2}$ che è ≥ 1 . ☹️

2° modo Cerco la costante di Lip. in $[0, \frac{7}{2}]$ che è la zona in cui sta a_n . ☹️

$$|f'(x)| = \left| -\frac{7 \cdot 5}{(5x+2)^2} \right| = \frac{35}{(5x+2)^2} \quad \text{il max di questa in } [0, \frac{7}{2}] \text{ è } \frac{35}{4} \geq 1$$

Come rimediare? Cercare una limitazione dal basso per a_n che sia migliore di 0.
Calcolo un po' di termini



$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{7}{2}, \quad a_2 = \frac{7}{5 \cdot \frac{7}{2} + 2} = \frac{14}{39}$$

$$a_3 = \frac{7}{5 \cdot \frac{14}{39} + 2} = \frac{7 \cdot 39}{158}, \quad a_4 = \frac{7}{5 \cdot \frac{7 \cdot 39}{158} + 2} = \text{numerac'o}$$

Spero che $\frac{5}{15a_4+2}$ sia < 1 oppure che $\frac{35}{(5a_4+2)^2}$ sia < 1 .

Se uno dei 2 è vero, allora posso $c =$ quel valore e ho il solito piano con la distanza

(i) $a_n \geq a_4$ per ogni $n \geq 4$

Inclusione

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ per ogni $n \geq 4$

Fatto sopra

(iii) $d_n \leq c^{n-4} d_4$ per ogni $n \geq 4$

Inclusione usando (ii)

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Soliti carabinieri

Secondo modo di rimediare Piano con le 2 sottosuccessioni

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Banale inclusione

(ii) $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solito applico f 2 volte

(iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

Solito teo. succ. monot.

(iv) $l = m = 1$

Come prima

Oss. Nel p.to (ii) al passo base dovrai verificare che

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$$

$$0 \leq \frac{14}{39} \leq 1$$

$$\frac{7}{2}$$

Sapendo che $a_0 \leq a_2 \leq 1$, applico f e ottengo

$$f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1) \\ a_1 \geq a_3 \geq 1$$

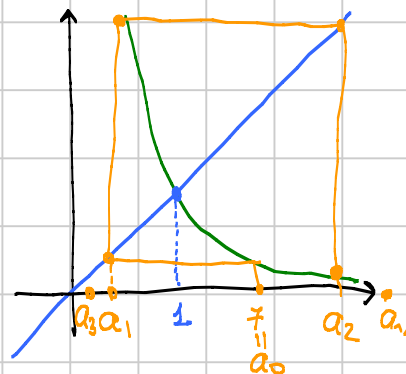
— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n^2} \quad a_0 = 7$

Idea: c'è spiraleggiamento uscente. Meglio

$a_{2n} \rightarrow +\infty$ crescendo

$a_{2n+1} \rightarrow 0$ decrescendo



PIANO

(i) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2m+3} \leq a_{2m+1} \leq 1 \leq a_{2m} \leq a_{2m+2}$

(iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$a_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

(iv) $l = +\infty$ e $m = 0$

Inclusione banale

Applico f 2 volte

Solito

Dim (iv)

Se per assurdo l ed m fossero reali ... sistema ...

avrei che $l = m = 1$.

Tuttavia $a_n \geq 7$ per n pari, e questo le impedisce di tendere ad $l = 1$.