

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 063

Titolo nota

14/11/2012

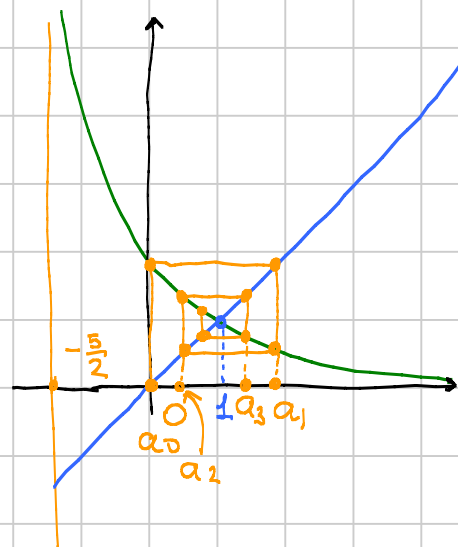
Successioni per riconvergenza spiraleggianti

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{7}{2a_n + 5}$ $a_0 = 0$

$$f(x) = \frac{7}{2x+5} \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{7}{2x+5} = x$$

$$\Leftrightarrow 7 = 2x^2 + 5x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ oppure } x = -\frac{7}{2}$$



Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando", quindi la monotonia non si può usare in maniera diretta.

PIANO CON LA DISTANZA

Pougo $d_n = |a_n - 1|$ (distanza di a_n dal presunto limite $l=1$)

La speranza è dimostrare che $d_n \rightarrow 0$, il che è equivalente a dire che $a_n \rightarrow 1$.

Struttura del piano

- (i) a_n è certa zona da precisare
- (ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dove c è una costante $c < 1$
- (iii) $d_n \leq c^n \cdot d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iv) $d_n \rightarrow 0$

Dim. (iv) Grazie al p.to (iii) sappiamo che $d_n \rightarrow 0$ per i carabinieri

$$\begin{array}{ccc} \text{val. assol.} & & \text{p.to (iii)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{0} \leq d_n \leq \boxed{c^n \cdot d_0} \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \text{ perché } c < 1 \end{array}$$

Dim (iii) Facile induzione.

Passo base: $n=0 \quad d_0 \leq c^0 \cdot d_0$ ovvio

Passo induttivo Ipotesi: $d_n \leq c^n \cdot d_0$ Tesi: $d_{n+1} \leq c^{n+1} \cdot d_0$

p.to (ii) $\downarrow$ Hp. ind. per c $\downarrow$ percorso

$$\text{Dim.} \quad d_{n+1} \leq c d_n \leq c \cdot c^n d_0 = c^{n+1} d_0 \quad \text{il che è la tesi.}$$

Provo a trovare il fattore c nell'esempio.

1° modo: uso ricorrenza e spero --

$$\begin{aligned} \text{def.} \quad d_{n+1} &= |a_{n+1} - 1| \stackrel{\text{ricor.}}{=} \left| \frac{7}{2a_n + 5} - 1 \right| = \left| \frac{7 - 2a_n - 5}{2a_n + 5} \right| = \frac{2|1 - a_n|}{|2a_n + 5|} \\ &= \frac{2}{|2a_n + 5|} \cdot d_n \leq \frac{2}{5} \cdot d_n \quad \text{se sapessi che } a_n \geq 0 \text{ sempre} \end{aligned}$$

Posso ora scrivere il piano definitivo

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{2}{5} d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot d_0$ " " "

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Dim (i) Induzione banale. $n=0$ è vero.

$n \Rightarrow n+1$ Se $a_n \geq 0$, allora $\frac{7}{2a_n + 5} > 0$ il che permette di passare dall'ipotesi alla tesi.

Dim (ii) Conto fatto sopra

Dim (iii) e (iv) Esattamente come nel caso generale.

Oss. Se fosse servita una limitazione per a_n dall'alto e dal basso, avrei potuto dimostrare che

$$0 \leq a_n \leq \frac{7}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\underset{a_0}{0} \qquad \qquad \underset{a_1}{\frac{7}{5}}$

Anche questa si dimostra facilmente per induzione: $n=0$ ok.

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{7}{5}$

Dim. Prendo l'ipotesi e "applico $f(x)$ ". La funzione $f(x)$ è debolmente decrescente nell'intervallo $[0, \frac{7}{5}]$, quindi posso applicarla MA DEVO INVERTIRE I VERSI.

Quindi partendo da $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5}$ ottengo

$$f(0) \geq f(a_n) \geq f\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$\frac{7}{5} \geq a_{n+1} \geq \frac{7}{2 \cdot \frac{7}{5} + 5} = \frac{35}{39} \geq 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a_2}$

Ho quindi ottenuto che $\frac{7}{5} \geq a_{n+1} \geq 0$, che è proprio la tesi.

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0}$

2° modo di ottenere il punto (ii): esaminiamo più in generale il 1° modo uguoli per come ho trovato e

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)|$$

Supponiamo ora di sapere che $f(x)$, nella zona in questione, è lipschitziana con una costante c . Allora ho che

$$|f(a_n) - f(1)| \leq c |a_n - 1| = c d_n \quad \text{da cui} \quad d_{n+1} \leq c d_n.$$

Tutto sta a capire la costante c , cioè $\sup \{ |f'(x)| : x \in \text{zona in questione} \}$

$$f'(x) = -\frac{7 \cdot 2}{(2x+5)^2}, \quad \text{quindi} \quad |f'(x)| = \frac{14}{(2x+5)^2}$$

La zona in questione è quella in cui abbiamo detto che sta a_n , cioè ad esempio $x \geq 0$. Per $x \geq 0$ il sup vale $\frac{14}{25}$ e va bene perché è < 1 .

In questo caso il piano sarebbe stato

$$(i) \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{14}{25} d_n \quad \text{" (via lip.)}$$

(iii) e (iv) come sopra

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0}$

Oss. La successione a_n NON è monotona.

Tuttavia a_{2n} è debolmente crescente e a_{n+1} è debolmente decrescente.

In una sola formula posso scrivere che

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

La relazione precedente si dimostra per induzione.

$n=0$ Devo verificare che $a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$, il che richiede di calcolare i termini a_0, a_1, a_2, a_3 e sostituire.

Passo induttivo Ipotesi: $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$
Tesi: $a_{2n+2} \leq a_{2n+4} \leq 1 \leq a_{2n+5} \leq a_{2n+3}$

Dim. Prendo l'ipotesi e "applico $f(x)$ " INVERTENDO I VERSI

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_{2n}) & \geq & f(a_{2n+2}) & \geq & f(1) & \geq & f(a_{2n+3}) & \geq & f(a_{2n+1}) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \end{array}$$

$$a_{2n+1} \geq a_{2n+3} \geq \boxed{1 \geq a_{2n+4} \geq a_{2n+2}} \text{ quello che volevo}$$

Applico ancora $f(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_{2n+1}) & \leq & f(a_{2n+3}) & \leq & f(1) & \leq & f(a_{2n+4}) & \leq & f(a_{2n+2}) \\ \text{"} & & & & \text{"} & & & & \end{array}$$

$$\boxed{a_{2n+2} \leq a_{2n+4} \leq 1 \leq a_{2n+5} \leq a_{2n+3}}$$

esattamente la tesi che volevo.

Applicando 2 volte $f(x)$:

- i versi tornano gli stessi
- gli indici saltano di 2.

— 0 — 0 —