

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 062

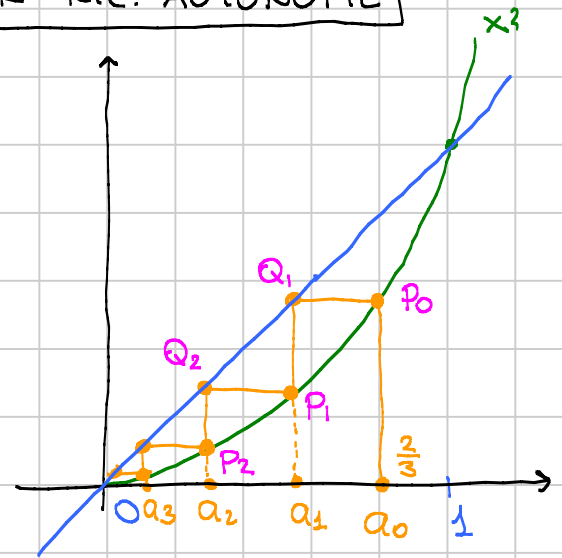
Titolo nota

10/11/2012

INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLE SUCC. PER RIC. AUTONOME

$$a_{n+1} = a_n^2 \quad a_0 = \frac{2}{3} \quad f(x) = x^2$$

→ Disegno sullo stesso grafico $f(x)$ e la bisettrice $y = x$
 (occorre capire dove si incontrano e chi sta sopra/sotto, cioè risolvere $f(x) = x$, $f(x) > x$, $f(x) < x$)



→ Seguo la condizione iniziale $a_0 = \frac{2}{3}$ sull'asse x

→ Seguo lo slogan: **VERTICALE ALLA FUNZIONE
ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE**

Scrivo le coordinate dei p.ti P_i e Q_i :

$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$Q_1 = (a_1, a_1)$
 la x coincide con la y perché è sulla bisettrice
 stessa y di P_0

$$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$$

stessa x di Q_1

$$Q_2 = (a_2, a_2)$$

Dall'interpretazione grafica è evidente che a_n decresce e tende a 0.
 Queste sono le informazioni che permettono di scrivere il piano.

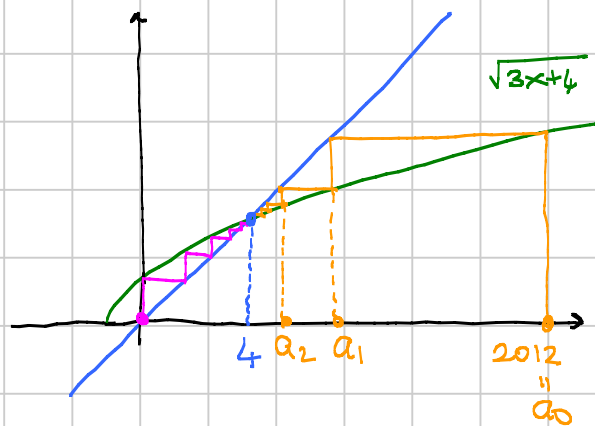
$$a_{n+1} = a_n^4 \quad a_0 = 5 \quad f(x) = x^4$$

Seguendo lo slogan si vede che $a_n \rightarrow +\infty$ crescendo
 occhio a non fare il contrario!!!



$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 2012$$

Dal grafico (fatto bene) è evidente che $a_n \rightarrow 4$ decrescendo.



Oss. Per vedere dove si incontrano il grafico e la bisettrice risolvo $x = \sqrt{3x+4}$, che è esattamente l'eq. che si ritrova al p.to (iv) del piano

Oss. Per vedere dove il grafico di f sta sopra la bisettrice risolvo la disuguaglianza $f(x) > x$, che è quella che si ritrova al p.to (ii) del piano seguendo il metodo "ricomenta + disuguaglianza".

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 0$

PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 4$

Edito svolgimento per il piano con la monotonia

Più in generale per $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = \alpha$ si ha che

- $a_n \rightarrow 4$ decrescendo se $\alpha > 4$
- $a_n \rightarrow 4$ crescendo se $\alpha \in [-\frac{4}{3}, 4)$
- $a_n \equiv 4$ (cioè vale sempre 4) se $\alpha = 4$

Esempio 2 $a_{n+1} = \arctan a_n \quad a_0 = 2012$

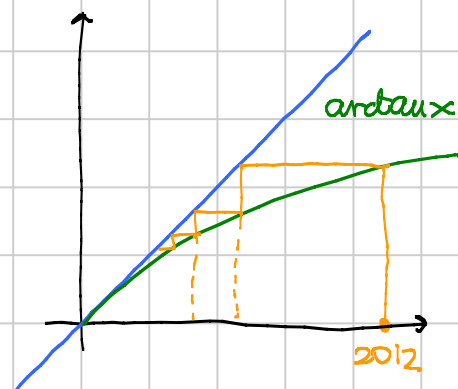
PIANO

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$



$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 2012$$

Voglio dimostrare che $a_n \rightarrow 4$

Pongo $d_n = a_n - 4$ (distanza di a_n dal presunto limite)

Quindi ora voglio dimostrare che $d_n \rightarrow 0$.

$$d_{n+1} = a_{n+1} - 4 = f(a_n) - f(4) = f'(c)(a_n - 4) = f'(c) \cdot d_n$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \quad \text{Ora se } c \geq 4 \text{ si ha che } f'(c) \leq \frac{3}{8}$$

perché il denominatore minimo si ottiene con $x=4$.

Ho così dimostrato che $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n$. Questo vuol dire che

$$d_1 \leq \frac{3}{8} d_0, \quad d_2 \leq \frac{3}{8} d_1 \leq \left(\frac{3}{8}\right)^2 d_0, \quad d_3 \leq \frac{3}{8} d_2 \leq \left(\frac{3}{8}\right)^3 d_0, \dots$$

e in generale $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0 \dots$ RIANVOLTO IL NASTRO si ottiene

PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = a_n - 4$

$$(i) \quad a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Come una volta)

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Lagrange come sopra usando il p.to (i) per dire che $c \geq 4$)

$$(iii) \quad d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(inclusione a partire dal p.to (ii))

$$(iv) \quad d_n \rightarrow 0$$

Dim. (iv) Grazie al p.to (i) ed al p.to (iii) sappiamo che

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

cioè $d_n \rightarrow 0$ per i carabinieri

Oss. È essenziale che il numero trovato al p.to (iii) sia < 1 .

— 0 — 0 —

