

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 061

Titolo nota

10/11/2012

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 2$ $x_0 = 2$

In questo caso non c'è proprio formula esplicita.

Esperimenti: $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 14$, $x_3 = 196 - 14 + 2 = 184$

Idea: x_n crescente e $x_n \rightarrow +\infty$

- PIANO
- (i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim (iii) Segue dal p.to (ii) e dal teo. sulle succ. monotone

Dim (iv) Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite a dx e sx della ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 2 & & \\ \downarrow & \quad \downarrow & \leftarrow \text{posso farlo solo se } l \in \mathbb{R} \\ l = l^2 - l + 2 & & \end{array}$$

Ho ottenuto l'equazione $l^2 - 2l + 2 = 0$. Ci piacerebbe che non avesse soluzioni o le avesse < 2 , cioè incompatibili con il p.to (i).

In questo caso $\Delta < 0$, quindi non ci sono soluzioni.

L'unica possibilità rimasta è $l = +\infty$.

Dim (i) Considero la funzione $f(x) = x^2 - x + 2$. Vediamo le zone di monotonia: $f'(x) = 2x - 1 \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{2}$.

Quindi $f(x)$ è debolmente crescente per $x \geq \frac{1}{2}$

Dimostro per induzione che $x_n \geq 2$

$n=0$ $x_0 \geq 2$, ma $x_0 = 2$ quindi ok

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \geq 2$ Tesi: $x_{n+1} \geq 2$

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 2 \geq 4 - 2 + 2 = 4 \geq 2 \text{ che è la tesi.}$$

Dim. applico f all'ipotesi: $f''(x_n) \geq f''(2)$

Dim. (ii)

1° modo: RICORRENZA + DISEQUAZIONE

Devo dim. che $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè (uso ricor.)

$$x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 2 \geq x_n$$

Trovo la diseq. $x^2 - x + 2 \geq x$, cioè $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ sempre verificata perché $\Delta < 0$, oppure perché $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \geq 0$.

Quindi $x_{n+1} \geq x_n$ sempre

2° modo: INDUZIONE + APPLICO f

Dim. per induzione che $x_{n+1} \geq x_n$.

$n=0$ $x_1 \geq x_0$ Vero perché $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$

Passo induttivo Ipotesi: $x_{n+1} \geq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

Dim.: prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ conservando i versi perché so già dal p.to (i) che x_{n+1} e x_n sono ≥ 2 , quindi in particolare $\geq \frac{1}{2}$, cioè nella zona di crescita di $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \geq x_n & \xrightarrow{\text{applico } f} & f(x_{n+1}) \geq f(x_n) \\ & & \begin{array}{c} \text{"} \\ x_{n+2} \geq x_{n+1} \end{array} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{tesi.}}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$a_0 = 2012$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$$

Esperimenti: $a_0 = 2012$, $a_1 = \sqrt{6040}$ tra 70 e 80

$a_2 = \sqrt{200 \text{ e rotti}}$ tra 14 e 20

PIANO

(i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 4$

Dim. (iii) Per il p.to (ii) e deb. decr. Per il p.to (i) è limitata inferiormente.

Teo. succ. monotone $\Rightarrow$ il limite esiste ed è reale.

Dim. (iv) Essendo $l \in \mathbb{R}$, posso passare al limite nella ricorrenza:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$l = \sqrt{3l + 4}$$

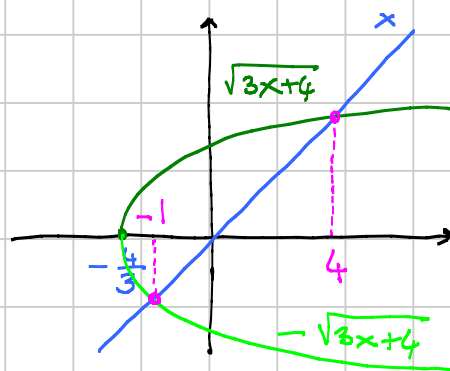
Otengo l'equazione $l = \sqrt{3l + 4}$. Risolvo facendo il quadrato:

$$l^2 = 3l + 4, \quad l^2 - 3l - 4 = 0, \quad (l+1)(l-4) = 0, \quad \text{quindi}$$

$$l = \begin{cases} -1 & \leadsto \text{verifica } -1 = \sqrt{1} \quad \text{no!} \\ 4 & \leadsto 4 = \sqrt{16} \quad \text{ok!} \end{cases}$$

L'unica sol. buona è $l = 4$

Parentesi: interpretazione grafica dell'eq. $x = \sqrt{3x+4}$



Dim. (i) Devo dim. che $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induzione + applico $f(x)$

$n=0$ $a_0 \geq 4$ banale essendo $a_0 = 2012$

Passo induttivo Ipotesi: $a_n \geq 4$ Terzi $a_{n+1} \geq 4$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico $f(x) = \sqrt{3x+4}$ che è debolmente crescente per $x \geq -\frac{4}{3}$. Ottengo

$$a_n \geq 4 \leadsto f(a_n) \geq f(4), \quad \text{cioè} \quad a_{n+1} \geq 4$$

Dim. (ii) 1° modo: RICORRENZA + DISEQUAZIONE (x_n e a_n scambiate 😊)

Devo dim. $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $\sqrt{3x_n+4} \leq x_n$, che rianda alla diseq. $\sqrt{3x+4} \leq x$. Questa ha come soluzione (precorso + interpretazione grafica) $x \geq 4$. Quindi $x_{n+1} \leq x_n$ è vero se $x_n \geq 4$, ma questo sappiamo che è vero grazie al p.to (i).

2° modo: INDUZIONE + APPLICO f

Passo base $a_1 \leq a_0$ banale perché $a_0 = 2012$ e $a_1 \leq 80$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim. Applico $f(x)$ all'ipotesi e con cambio i versi perché $f(x)$ è monotona crescente nella zona $x \geq -\frac{4}{3}$

$$a_{n+1} \leq a_n \rightsquigarrow \underbrace{f(a_{n+1}) \leq f(a_n)}_{0 \quad 0}, \text{ cioè } a_{n+2} \leq a_{n+1} \text{ che è la tesi.}$$

Esempio 3 $a_{n+1} = a_n^4$ $a_0 = 5$

- PIANO**
- (i) $a_n \geq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (inclusione + applico $f(x) = x^4$)
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (entrambi i modi precedenti)
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = +\infty$

Dim. (iv) Suppongo per assurdo $l \in \mathbb{R}$ e passo al limite a dx e sx

$$a_{n+1} = a_n^4$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$l = l^4$$

$$l = l^4 \text{ ha come soluzioni } l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Entrambe sono incompatibili con il p.to (i), quindi l'unica possibilità è $l = +\infty$.

Se fosse stato $a_0 = -2$. Se faccio il piano con (i) $a_n \geq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ i limiti $l=0$ e $l=1$ sarebbero stati compatibili.

Quindi era meglio iniziare il piano con

(i) $a_n \geq 16$ per ogni $n \geq 1$ e volendo proseguire con

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \geq 1$

— 0 — 0 —