

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 060

Titolo nota

10/11/2012

SUCCESIONI PER RICORRENZA

Come si presenta?

$$a_0 = 2$$

↓ dato iniziale

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↓ legge di passaggio: permette di calcolare un termine sapendo il termine precedente

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3a_0 - 1 = 5, \quad a_2 = 3a_1 - 1 = 14, \quad a_3 = 3a_2 - 1 = 41, \dots$$

↑
legge di pass.
con $n=0$

↑
 $n=1$

A differenza delle successioni fornite mediante una formula esplicita, se voglio calcolare a_{2012} per una succ. per ricorrenza devo prima calcolare tutti i termini precedenti.

Domande: come si comporta la successione? Qual è il limite?

Ci sono pochi casi fortunati in cui si riesce a trovare una formula esplicita, ma sono casi speciali.

Obiettivo: studiare comportamento senza formula esplicita.

Notazione

$$a_0 = \alpha$$

↑
dato

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

↑ 1° ordine, autonoma

↑ data e rappresenta la legge di passaggio

(o anche $a_{15} = \alpha$ dato ... così si trova a_n per $n \geq 15$)

1° ordine = dipendenza dal solo termine precedente

2° ordine: " dai due termini precedenti, ad esempio

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$a_0 = \alpha \quad a_1 = \beta$$

↓ Due dati iniziali

(tanti quanti l'ordine)

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$$

$$a_0 = 2$$

$$a_{n+1} = 3a_n - n$$

NON AUTONOMA: la legge di passaggio cambia di volta in volta.

Autonoma: $a_{n+1} = f(a_n)$

Non autonoma: $a_{n+1} = f(a_n, n)$

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - n$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3a_0 - 0 = 6, \quad a_2 = 3a_1 - 1 = 17$$

$\uparrow$ $\boxed{n=0}$ $\uparrow$ $\boxed{n=1}$

$$a_{n+1} = \boxed{n}a_n + 5a_{n-1} \quad \leftarrow \text{2° ordine, NON autonoma}$$

Brutalmente: una succ. per ricorrenza è autonoma se n compare solo tra gli indici.

Ci occuperemo solo di succ. per ricorrenza del 1° ordine, autonome e non autonome.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n^2$ $x_0 = \frac{2}{3}$

Oss. In questo caso si potrebbe trovare una formula esplicita per x_n (esercizio), ma facciamo finta di non riuscirci.

Esperimenti: $x_0 = \frac{2}{3}$, $x_1 = x_0^2 = \frac{4}{9}$, $x_2 = x_1^2 = \frac{16}{81}$

Idea: x_n è decrescente e tende a 0. Per dimostrarlo serve un PIANO.

- PIANO
- (i) $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 - (iv) $l = 0$

Dim (iii) Dal p.to (ii) sappiamo che x_n è debolm. decrescente

Dal p.to (i), e in particolare da $x_n \geq 0$, sappiamo che x_n è limitata inferiormente

Il teorema delle successioni monotone ci assicura che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Dim (iv)

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array}$$

Sapendo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, passo al limite a dx e sx.

Otengo l'equazione $l = l^2$ che ha come soluzioni $l = 0$ e $l = 1$.

Ora $l = 1$ è incompatibile con il fatto che $x_n \leq \frac{2}{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi l'unica possibilità è $l = 0$.

Dim di (i)

Devo dim. che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$x_n \leq \frac{2}{3} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

La prima è banale perché $x_0 = \frac{2}{3} \geq 0$, e poi $x_{n+1} = x_n^2 \geq 0$.

Per dimostrare che $x_n \leq \frac{2}{3}$ procedo per induzione

Passo base

$$n=0 \quad x_0 = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} \quad \text{ok.}$$

Passo induttivo

$$\text{Ipotesi} \quad x_n \leq \frac{2}{3} \quad \text{Tesi:} \quad x_{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

Dim. pass. induttivo: Prendo l'ipotesi ed elevo al quadrato. Trattandosi di roba ≥ 0 conservo i versi

$$x_{n+1} = x_n^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \leq \frac{2}{3} \quad \text{quindi } x_{n+1} \leq \frac{2}{3}, \text{ cioè la tesi.}$$

$\uparrow$ ricom. $\uparrow$ ipotesi² $\uparrow$ conto $\uparrow$ banalità

Dim (ii)

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1° modo:

ricomputa + disequazione

$$x_{n+1} \leq x_n \iff x_n^2 \leq x_n \quad \text{ottergo così la diseq.} \quad x^2 \leq x$$

uso ricomputa $\rightarrow$

$$x^2 - x \leq 0 \quad x(x-1) \leq 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Quindi $x_n^2 \leq x_n \iff 0 \leq x_n \leq 1$, ma sappiamo già che questo è vero grazie al p.to (i)

(se a_n sta 0 e $\frac{2}{3}$, a maggior ragione sta tra 0 e 1).

— 0 — 0 —

Dim. alternativa del p.to (i)

INDUZIONE CON "APPLICO f "

$$x_{n+1} = x_n^2 = f(x_n)$$

Osservo che $f(x) = x^2$ è debolmente crescente per $x \geq 0$

Ora procedo per induzione. $n=0$ $0 \leq x_0 \leq \frac{2}{3}$ banale essendo $x_0 = \frac{2}{3}$

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3}$ Tesi: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3}$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico f (e posso farlo conservando i versi per cui $f(x)$ è deb. cresc. per $x \geq 0$)

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} & f(0) \leq f(x_n) \leq f\left(\frac{2}{3}\right) & & & \\ \parallel & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{4}{9} \leq \frac{2}{3} & & & & \end{array}$$

Dim. alternativa p.to (ii)

INDUZIONE + APPLICO $f(x)$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$ $x_1 \leq x_0$ sostituendo $\frac{4}{9} \leq \frac{2}{3}$ Ok.

Pass. induttivo Ipotesi $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (e posso farlo perché dal p.to (i) so già che x_n e x_{n+1} sono ≥ 0).

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \leq x_n & \xrightarrow{\text{applico } f} & f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ & & x_{n+2} \leq x_{n+1} \leadsto \text{Tesi} \\ & \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} & \end{array}$$