

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 059

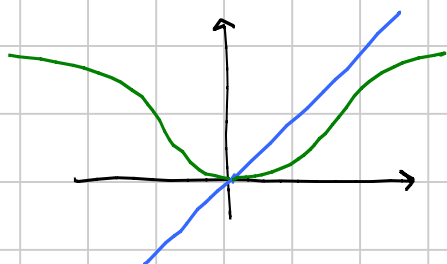
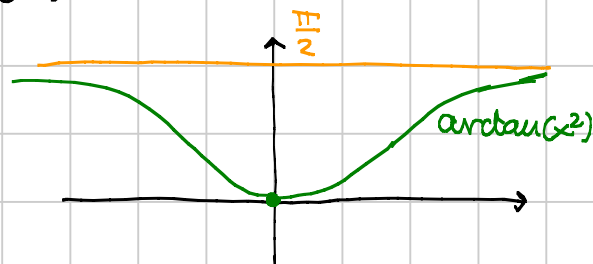
Titolo nota

09/11/2012

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

Come è fatta $\arctan(x^2)$?

Se vado a sovrapporre con x non è chiaro cosa succede



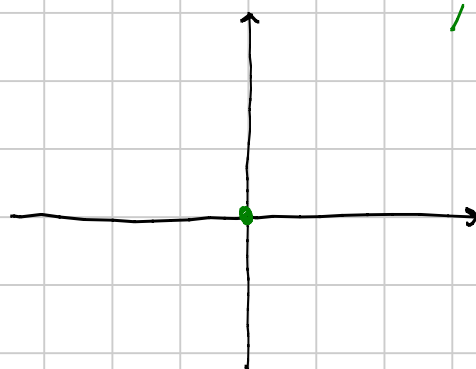
Non è chiara la situazione dalla sovrapposizione dei grafici!

Studio quindi $f(x) = x - \arctan(x^2)$

Nessuna simmetria

Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

$f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Se fosse monotona... proviamo

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Denominatore ≥ 1 sempre, quindi il segno di $f'(x)$ dipende unicamente dal segno del numeratore.

Devo risolvere $x^4 - 2x + 1 = 0$ > 0 < 0 .

Si vede a occhio che $x=1$ è soluzione, quindi posso dividere per $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & -2x+1 \\ -x^4+x^3 & \\ \hline x^3 & -2x+1 \\ -x^3+x^2 & \\ \hline x^2-2x+1 & \\ -x^2+x & \\ \hline -x+1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quindi

$$(x^4 - 2x + 1) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$$

Resta da capire il segno di

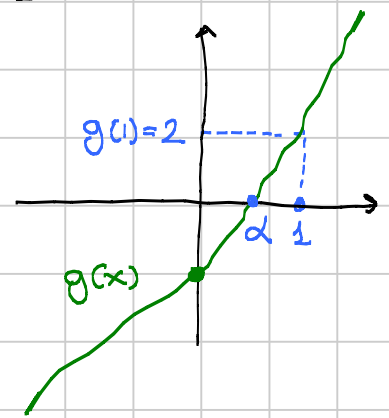
$$x^3 + x^2 + x - 1$$

Studio da una parte la funzione $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad g(0) = -1$$

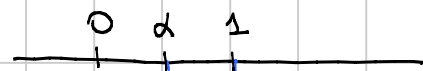
$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{3} \quad \text{NON CI SONO RADICI}$$



Quindi $g'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi g è strettamente crescente.

In particolare $g(x)$ si annulla in un UNICO pto misterioso α . Devo capire se $\alpha < 1$ oppure $\alpha > 1$. Calcolo $g(1) = 2$



$$x^3 + x^2 + x - 1 = g(x)$$

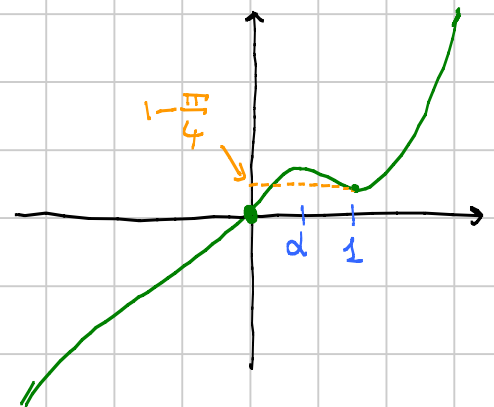
$$x^4 - 2x + 1 = \text{Numeratore di } f'(x)$$

$$f(x)$$

Quindi $f(x)$ non è monotona

Calcolo $f(1)$ per capire se scende sotto zero oppure no.

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$



Conclusione

$$f(x) > 0 \text{ per ogni } x > 0 \quad \arctan(x^2) < x \text{ per ogni } x > 0.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) < 0 \text{ per ogni } x < 0$$

Esempio 2 Consideriamo $\sqrt[4]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$

Quale di questi numeri è il più grande? Sto facendo

$$\max \{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$$

Considero la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ e la studio.

Punto 1 Nessuna simmetria

Punto 2 Definita e continua in $(0, +\infty)$.

(potenza batte log.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad [= \infty^0 \text{ forma indet.}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = [e^{-\infty}] = 0^+$$

Punto 3 Zeri e segno: $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$

Punto 4 Derivabile per ogni $x > 0$

$$f'(x) = e^{\frac{\log x}{x}} \cdot \left[\frac{\log x}{x} \right]'$$

$$= e^{\frac{\log x}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = e^{\frac{\log x}{x}} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}$$

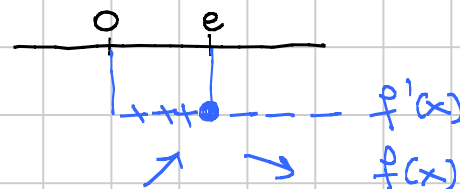
> 0 perché considero solo $x > 0$

Quindi il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di $1 - \log x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, e)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \log x > 1 \Leftrightarrow x > e$$



Dov'è che $f(x)$ interseca l'asintoto? Risolvo $f(x) = 1$, e $\frac{\log x}{x} = 1$
 se e solo se $\frac{\log x}{x} = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

La domanda di potenza era $\max \{f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, quindi sul grafico considero solo i pti con ascissa intera.

Devo determinare il punto più alto?

Se la giocano i due punti intorno ad e
 cioè per $n = 2$ e per $n = 3$. Si tratta di
 confrontare $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$...

— 0 — 0 —

