

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è Lipschitziana in A (*sempre precisare l'insieme*) se esiste una costante L tale che

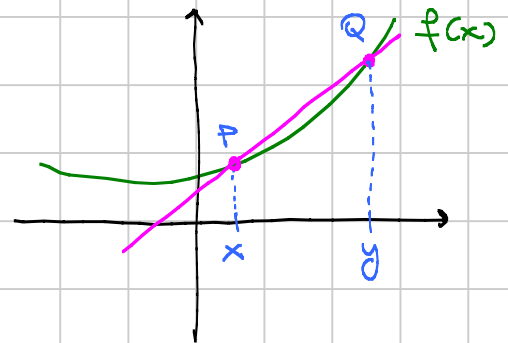
$$|f(y) - f(x)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

Oss. Se un certo valore di L va bene, allora vanno bene anche i valori successivi. Il più piccolo valore di L che va bene si dice costante di Lipschitz di f in A .

Significato geometrico Dividendo (possibile quando $x \neq y$) si ottiene

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$$

↓
coeff. angolare della retta che
congiunge i p.ti P e Q del grafico
corrispondenti a x e y .

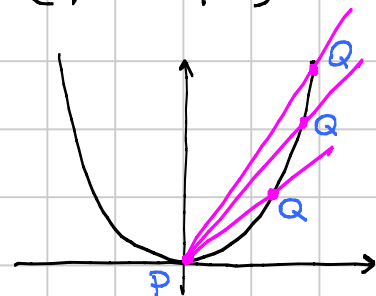


Quindi: funzione Lipschitziana $\Leftrightarrow$ c'è un controllo sulla pendenza delle rette che congiungono 2 p.ti del grafico (qualunque)

Esempi $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ NON è LP su tutto $\mathbb{R}$

Idea: più spostato il punto Q verso l'alto, più la retta PQ diventa pendente.

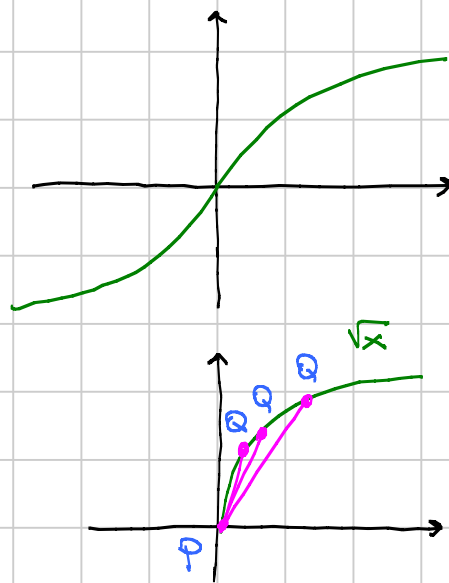


$f(x) = \arctan x$ è LIP su tutto $\mathbb{R}$ (SI)

$f(x) = x^2$ è LIP in $[-100, 100]$ (SI)

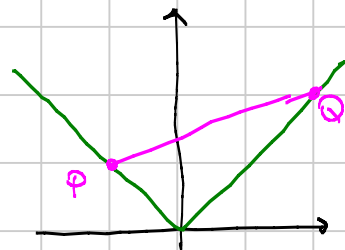
$f(x) = \sqrt{x}$ è LIP in $[1, +\infty)$ (SI)

$f(x) = \sqrt{x}$ è LIP in $[0, +\infty)$ (NO)



Su tutto $[0, +\infty)$ la risposta è NO perché se prendo P nell'origine e Q sempre più vicino a P ottengo pendenze sempre più elevate (la tangente nell'origine è la retta verticale)

Oss. Una funzione Lipschitziana non è obbligata ad essere derivabile. Esempio: $f(x) = |x|$ è Lip. su tutto $\mathbb{R}$



Teorema Sia I un insieme come nella def. di funzione convessa (tutto $\mathbb{R}$, semiretta, intervallo), e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione DERIVABILE.
Allora f è Lip. in I se e solo se $f'(x)$ è limitata in I .
Inoltre la costante di Lip. di f in I è data dalla formula

$$L = \sup \{ |f'(x)| : x \in I \}$$

Dim. Supponiamo che $f'(x)$ sia limitata, sia $L = \sup \{ |f'(x)| : x \in I \}$ e mostriamo che

$$|f(y) - f(x)| \leq L |y - x| \quad \forall x \in I, \forall y \in I$$

Per il teo. di Lagrange abbiamo che

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) \quad \text{dove } c \text{ sta tra } x \text{ e } y, \text{ quindi}$$

$$|f(y) - f(x)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq L} \cdot |y - x| \leq L \cdot |y - x|$$

Viceversa, supponiamo $f(x)$ Lip. con costante L . Allora tutti i rapporti incrementali sono compresi tra $-L$ ed L , quindi anche la derivata è compresa tra $-L$ ed L , quindi è limitata.

— 0 — 0 —

Operativamente: una funzione derivabile è Lip. in un certo insieme se e solo se la sua derivata è limitata in quell'insieme.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, $A = [0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x \quad \text{Ora}$$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|2x| : x \geq 0\} = +\infty$$

quindi x^2 non è Lip. in $[0, +\infty)$.

Esempio 2 $f(x) = x^2$, $A = [-100, 100]$

$$f'(x) = 2x$$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|2x| : x \in [-100, 100]\} = 200 = L$$

Quindi x^2 è Lip. in $[-100, 100]$ con costante $L = 200$, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

$$|x^2 - y^2| \leq 200 |x - y|$$

$$\forall x \in [-100, 100], \forall y \in [-100, 100].$$

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [1, +\infty)$

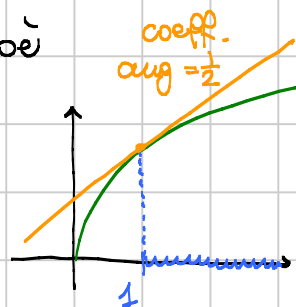
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1\right\} = \frac{1}{2} = L$$

Quindi $\sqrt{x}$ è Lip. in $[1, +\infty)$ con costante $L = \frac{1}{2}$, cioè

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2} |y - x| \quad \forall x \geq 1, \forall y \geq 1$$

$$\forall x \geq 1, \forall y \geq 1$$



Esempio 4 $f(x) = \cos x$, $A = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|\sin x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$$

Quindi è Lip. con costante $L = 1$, cioè $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$\begin{aligned} |\cos y - \cos x| &\leq |y - x| & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ |\sin y - \sin x| &\leq |y - x| & \text{"} \quad \text{"} \\ |\arctan y - \arctan x| &\leq |y - x| & \text{"} \quad \text{"} \end{aligned}$$

Per verificare l'ultima devo dim. che $f(x) = \arctan x$ è Lip. con $L=1$ su tutto $\mathbb{R}$:

$$L = \sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} = 1.$$

Esempio 5 $f(x) = \cos(x^2)$ $A = [-3, 8]$

Sicuramente è Lipschitziana. Devo fare

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [-3, 8] \} = \max \{ |f'(x)| : x \in [-3, 8] \} = \text{Numero (non } +\infty)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\nwarrow$
 funzione continua intervallo con estremi WEIERSTRASS

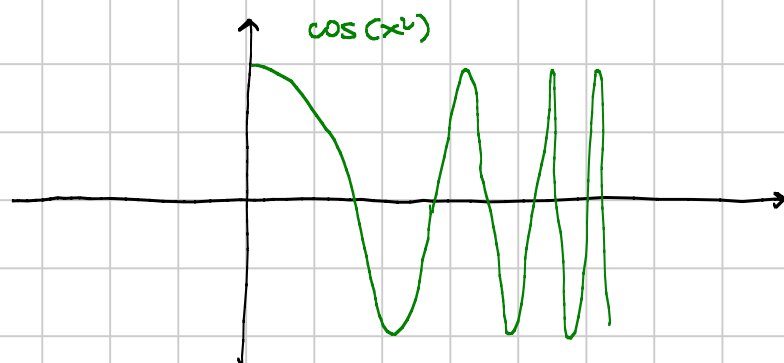
Il calcolo esplicito del sup/max serve solo per conoscere l'esatta costante L .

Esempio 6 $f(x) = \cos(x^2)$ $A = \mathbb{R}$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ |-2x \cdot \sin(x^2)| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$$

Basta prendere x grandi con $\sin(x^2) = 1$, cioè $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$



più le oscillazioni si avvicinano,
più aumentano le pendenze sul
grafico.