

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 057

Titolo nota

09/11/2012

Disuguaglianze classiche

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0 \quad \text{con} = \text{se e solo se } x=0$$

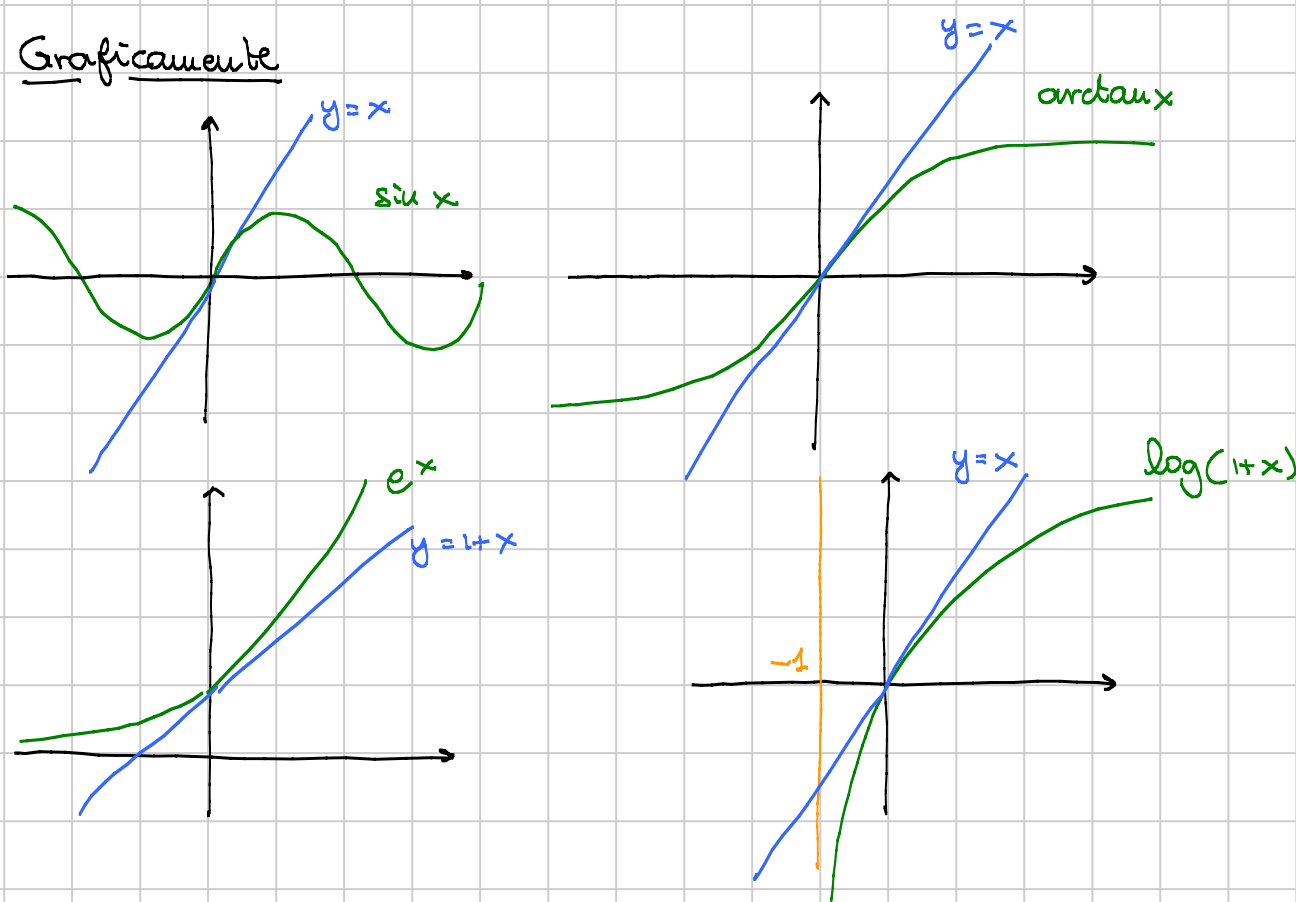
$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con} = \text{se e solo se } x=0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0 \quad \text{" " "}$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{" " "}$$

$$\log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1 \quad \text{" " "}$$

Graficamente



Come si dimostrano? Metodo universale: studio di funzioni o in alternativa Taylor-Lagrange.

$\sin x \leq x$ Pongo $f(x) = x - \sin x$ e la studio.

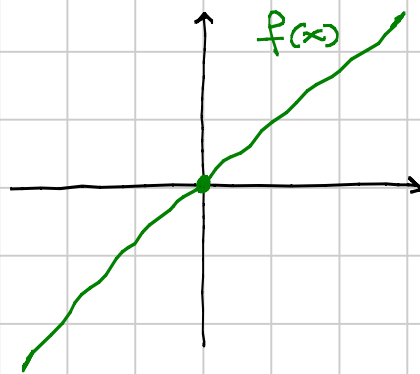
Funzione dispari, definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 - \cos x$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$



Quindi ho $f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento

sporadico, quindi per Monotonia 3 si ha che

$f(x)$ è strettamente monotona. Questo basta per concludere che

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \text{cioè} \quad \sin x = x \Leftrightarrow x = 0$$

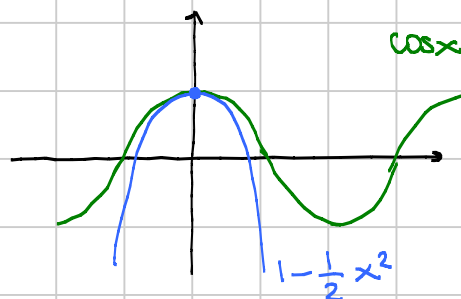
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad \text{cioè} \quad \sin x < x \Leftrightarrow x > 0$$

$$" < " \quad x < 0 \quad " \quad \sin x > x \Leftrightarrow x < 0.$$

— 0 — 0 —

$$\boxed{\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2}$$

Studio la funzione $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$



Funzione pari, definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

Per capire l'aumento, studio la monotonia.

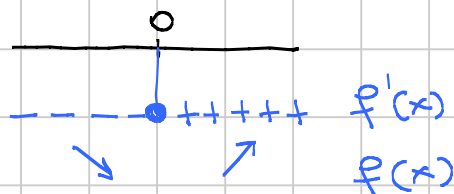
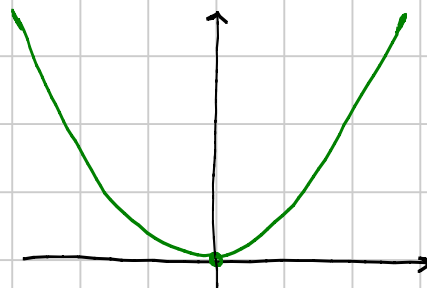
$$f'(x) = -\sin x + x \quad (\text{esiste in tutto } \mathbb{R})$$

Studio il segno di $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = x \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\sin x + x > 0 \Leftrightarrow x > \sin x \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \dots \Leftrightarrow x < 0$$

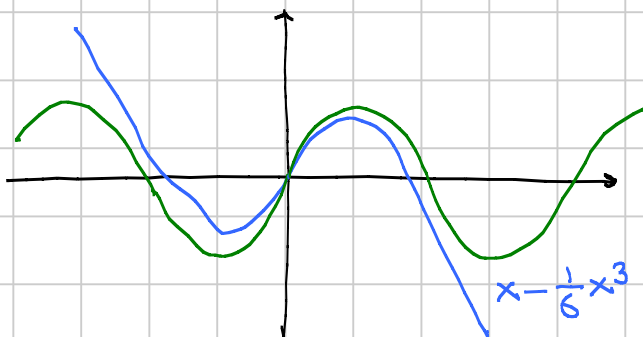


Questo basta per concludere che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

— 0 — 0 —

$$\boxed{\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3}$$

L'idea è che la disuguaglianza sia vera $\forall x \geq 0$ con $= \Leftrightarrow x = 0$



Come prima studio $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$

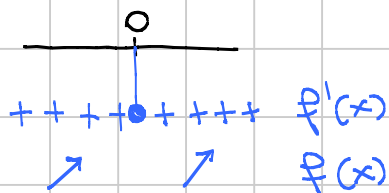
Funzione dispari, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{studio precedente})$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad (\text{studio precedente})$$



Conclusione: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, cioè

$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow x = 0$$

— 0 — 0 —

Esercizio: scrivere e dimostrare la successiva disuguaglianza (riguarda cos)

— 0 — 0 —

$\arctan x \leq x$ Considero $f(x) = x - \arctan x$

Funzione dispari, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Spero che sia strettamente crescente

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{1+x^2}-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

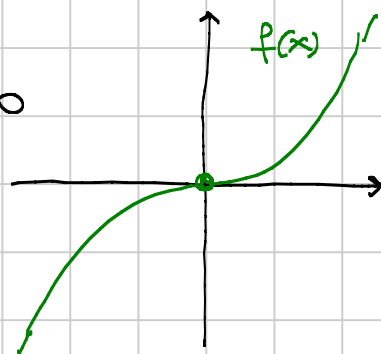
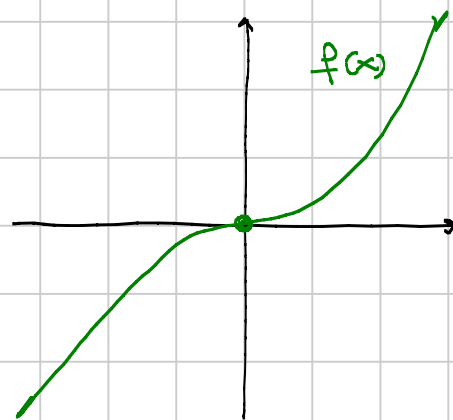
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (sporadico)}$$

} $\Rightarrow$
 $\uparrow$
Monotonia 3

f è strettamente crescente, quindi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ cioè } x > \arctan x \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ cioè } x = \arctan x \Leftrightarrow x = 0$$



Soluzione alternativa: Taylor-Lagrange con $n=1$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c) \frac{x^2}{2} \quad \text{dove } c \text{ sta tra } 0 \text{ e } x$$

La applico con $f(x) = \arctan x$: $\arctan x = \underbrace{x}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2} x^2}_{\text{resto}}$

Si tratta di capire il segno del resto

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \quad \text{Ci sono 2 casi}$$

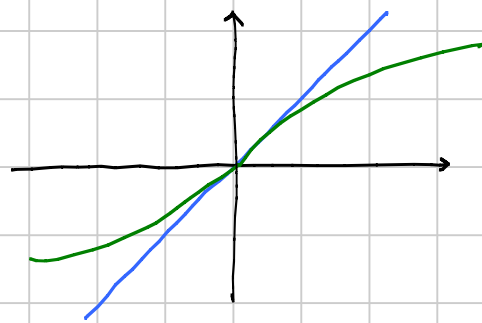
① Se $x > 0$, allora $\begin{array}{ccc} 0 & c & x \\ | & \bullet & | \end{array}$ $c > 0$, quindi $f''(c) < 0$, quindi resto < 0 . Ma allora

$$\arctan x = x + \text{roba neg} < x$$

② Se $x < 0$, allora $\begin{array}{ccc} x & c & 0 \\ | & \bullet & | \end{array}$ $c < 0$, quindi $f''(c) > 0$ e resto > 0 . Ma allora

$$\arctan x = x + \text{roba pos.} > x.$$

Altra interpretazione: per $x > 0$ si ha che $\arctan x$ è concava ($f''(x) < 0$), quindi sta sotto alle sue rette tangenti, compresa $y=x$ che è la retta tangente nell'origine. Per $x < 0$ diventa convessa, dunque sta sopra la retta tangente.



Oss. Come è messo il grafico di $\arctan x$ rispetto a $2x$ e a $\frac{1}{2}x$

$$\arctan x \leq 2x \quad \forall x \geq 0 \text{ con } = \Leftrightarrow x=0.$$

Invece con $\frac{1}{2}x$ ci sono 3 intersezioni

[Esercizio: verificarlo con studio di funzioni].

