

Estensioni del teorema di Weierstrass1° caso: funzioni periodiche

$$\max \{ \log(10 + 3\cos^3 x) + \sin(5x) : x \in \mathbb{R} \}$$
 esiste o no?

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché non ci sono problemi perché l'argomento di $\log$ vale ≥ 7 . Però $\mathbb{R}$ non è un intervallo $[a, b]$, quindi non sono autorizzato ad usare W. Allora BOH.

Tuttavia $f(x)$ è PERIODICA di periodo 2π perché $f(x+2\pi) = f(x)$.

Fatto generale Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e periodica, allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Questi a loro volta coincidono con

$$\max \{ f(x) : x \in [0, T] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [0, T] \}$$

dove T è un periodo di $f(x)$.

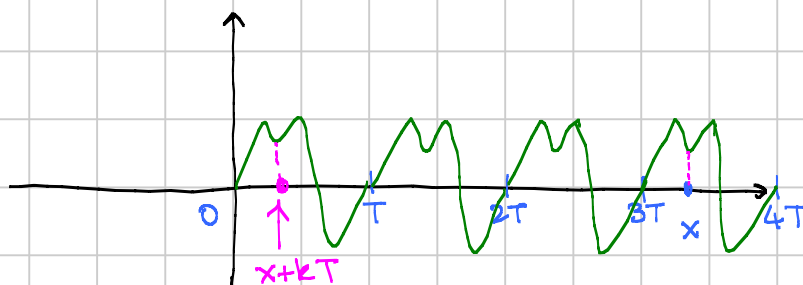
Dim. Sia $M = \max \{ f(x) : x \in [0, T] \}$. Questo esiste per W. Sia $x_0 \in [0, T]$ uno dei corrispondenti p.t.i di max.

Voglio dim. che $M = \max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$. Devo fare 2 verifiche:

(i) esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = M$ (basta prendere $x = x_0$)

(ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) \leq M$. Ora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{Z}$ t.c. $x + kT \in [0, T]$ (cioè aggiungendo o togliendo un multiplo di T casco in $[0, T]$). Ora

$$f(x) \stackrel{\uparrow \text{per periodicità}}{=} f(x + kT) \leq M \stackrel{\uparrow \text{perché } M \text{ è il max in } [0, T]}{}$$



Esempio 1 $\min \{ e^{\cos x} + \arctan(\sin x) : x \in \mathbb{R} \}$ esiste.

Quanti sono i pti di minimo in $\mathbb{R}$? Infiniti! Infatti ce n'è almeno uno in $[0, 2\pi]$, e poi ci sono tutti i suoi traslati.

Esempio 2 $\min \{ \underbrace{\sin x + \arctan(e^x) + x^4}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \}$ esiste !!

Si vede che $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Queste informazioni bastano per garantire l'esistenza del minimo.



Fatto generale Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$ esiste per forza. (ovviamente $\sup = +\infty$)

Dim.: L'idea è che la battaglia per il minimo non si gioca agli estremi ma in un intervallo centrale in cui posso usare W. Formalmente.

Considero $f(0)+1$.

Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$

esiste $B > 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1 \quad \forall x \geq B$

Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$

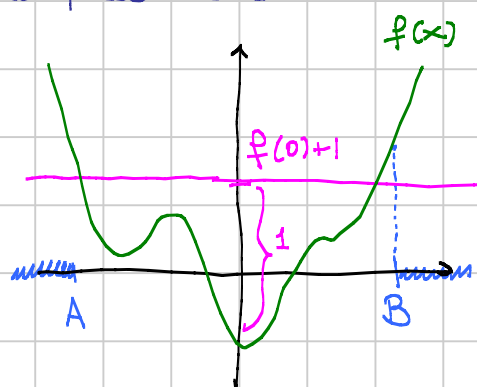
esiste $A < 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1 \quad \forall x \leq A$.

Pongo ora $m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$. Questo esiste per W.

Dico che m è anche $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Sia x_0 un pto di minimo in $[A, B]$. Dico che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [A, B]$ è banale (x_0 è pto di min. in $[A, B]$)
- Se $x \geq B$, allora $f(x) \geq f(0)+1 \geq f(0) \geq f(x_0)$
- Se $x \leq A$, stessa cosa.



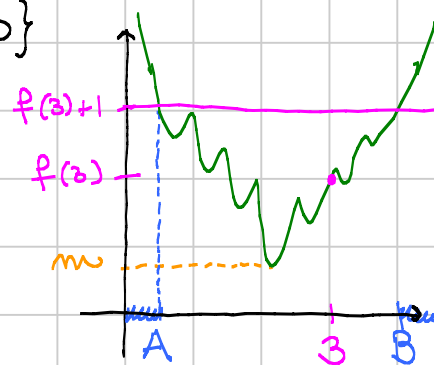
Esempio 3

$$\min \left\{ \frac{1}{x} + x^3 + \arctan(x^2) : x > 0 \right\}$$

" $f(x)$ "

$f(x)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



Questo basta per garantire l'esistenza del minimo.

[Come prima, esiste un intervallo $[A, B]$ con $0 < A < 3 < B$ t.c.

$$f(x) \geq f(3) + 1 \quad \forall x \geq B \text{ e}$$

$$f(x) \geq f(3) + 1 \quad \forall x \in (0, A].$$

Quindi la battaglia per il minimo si gioca in $[A, B]$ dove vale w .

Altre varianti:

$$\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua con } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

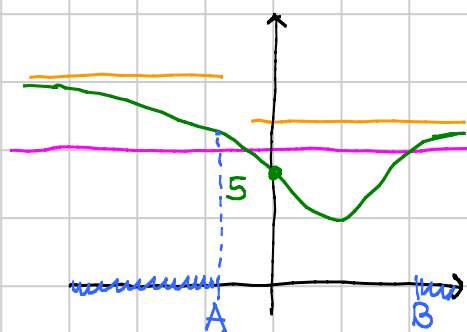
Allora esiste $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$



$$\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua con } f(0) = 5 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 5$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$



Oss. Una volta che so che il minimo esiste (ad esempio su tutto $\mathbb{R}$)

i pti di minimo li cerco in 2 categorie

$\rightarrow$ pti stazionari interni (quelli in cui $f'(x) = 0$)

$\rightarrow$ pti singolari interni (quelli in cui $f'(x)$ non esiste).

Esempio

$$\{x^2 - \sin(x^3) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\sup \{ \quad \} = +\infty$$
$$\max \{ \quad \} \text{ N.E.}$$

(basta fare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$)

Il minimo esiste perché f è continua in $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La funzione $f(x) = x^8 + \log(1+x^{10}) - \arctan(e^{x^2})$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e/o surgettiva?

NO! Basta osservare che è continua e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

In fatti il minimo m esiste e ora

• per $\lambda < m$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha 0 sol.
 $\Rightarrow$ addio surgettività

• per $\lambda > m$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 sol.
 $\Rightarrow$ addio iniettività.

— o — o —

