

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE

Titolo nota

08/11/2012

ASINTOTI ↗ ORIZZONTALI
↘ VERTICALI
↘ OBLIQUI

Asintoti orizzontali Una retta $y = a$ si dice asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Analogamente, $y = a$ si dice asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$ se

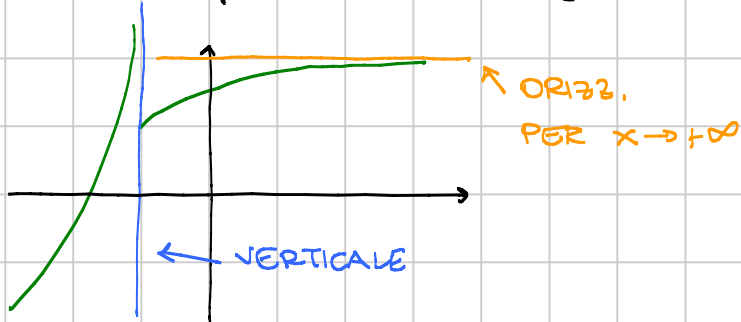
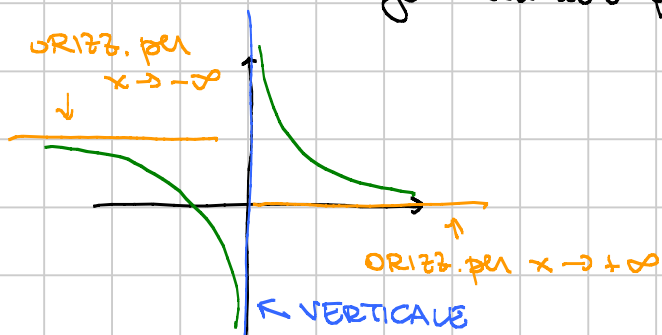
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.$$

Operativamente: gli asintoti orizzontali, che non sono obbligati ad esistere e sono al max 2, si determinano facendo il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Asintoti verticali Una retta $x = a$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una di queste 4 possibilità

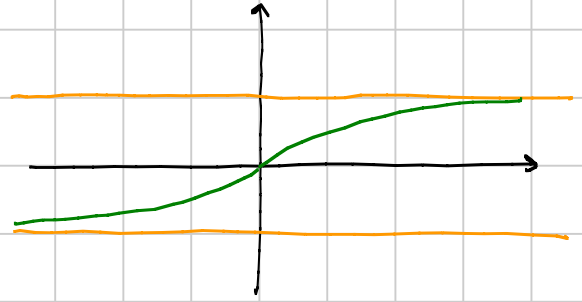
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Operativamente: gli asintoti verticali, che non sono obbligati ad esistere, e possono essere quanti ne pare, si determinano cercando gli eventuali p.ti a in cui $f(x)$ tende a $\pm\infty$ (ad x o su).



Esempio 1 $f(x) = \arctan x$. Allora esistono 2 asintoti orizzontali

- $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$
- $y = -\frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow -\infty$



Esempio 2 $f(x) = \frac{x}{x+1}$

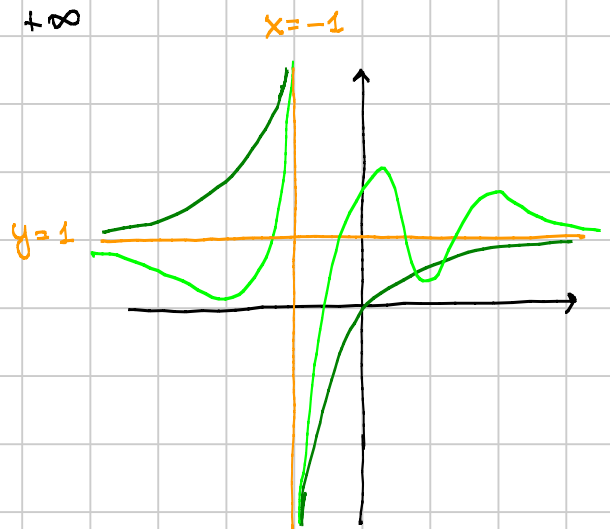
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ è asint. orizz. per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ è asint. orizz. per } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \Rightarrow x=-1 \text{ è asint. verb.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

Studio di funzione per decidere tra le varie possibilità.

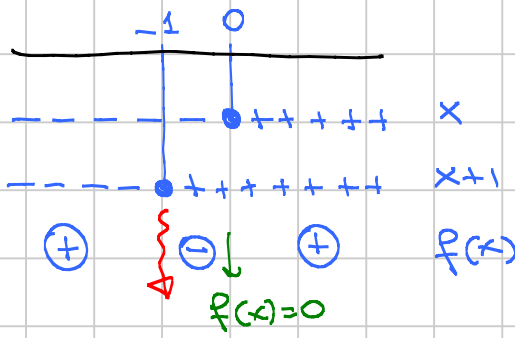


Punto 1 Simmetrie $\rightarrow$ nulla

Punto 2 Definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
cioè per $x \neq -1$.

Limiti agli estremi della zona di
continuità: già fatti.

Punto 3 Zeri e segno: risolvere $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$$

Si vede che il segno è coerente con i
limiti trovati per $x \rightarrow -1^+$ e $x \rightarrow -1^-$

Per vedere il posizionamento del grafico rispetto all'asintoto orizzontale $y=1$ ci sono almeno 2 opzioni:

→ risolvere $f(x) = 1$, $f(x) > 1$, $f(x) < 1$ (provare per esercizio)

→ studiare le zone di monotonia di $f(x)$

Punto 4 Derivabilità e segno di $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ mai, $f'(x) > 0$ sempre per $x \neq -1$, $f'(x) < 0$ mai



$f'(x)$
 $f(x)$

Questo conferma il 1° grafico.

Achtung! Abbiamo dim. che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Questo non vuol dire che $f(x)$ è crescente in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(ad esempio $3 > -3$, ma non è vero che $f(3) > f(-3)$)

L'implicazione $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crescente vale solo nelle zone "senza buchi".

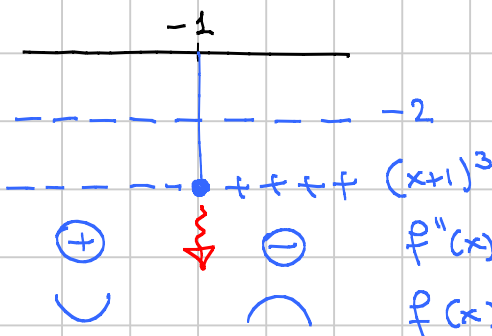
Quindi nell'esempio posso dedurre che $f(x)$ è strett. crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$.

Punto 5 Zone di concavità-convessità.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$[(x+1)^{-2}]' = -2(x+1)^{-3} \cdot 1$$



$f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow$ convessa

$f''(x) < 0$ per $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ concava

— 0 — 0 —

Asintoti obliqui Una retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Analogamente, la stessa retta è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

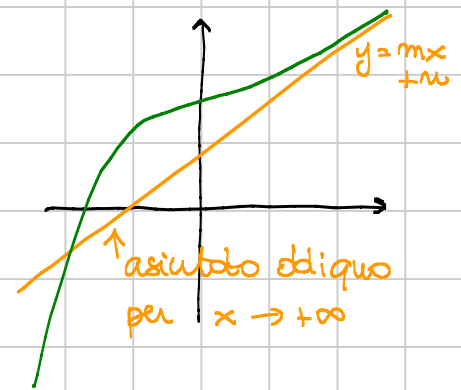
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Graficamente: la distanza tra $f(x)$ e la retta $y = mx + n$ tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$

Operativamente: come calcolare m ed n ?

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

(A $-\infty$ stessa cosa con limiti per $x \rightarrow -\infty$)



Oss. Se il limite che definisce m è del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, si può provare ad usare l'Hôpital, riducendosi a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

Dim.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - mx - n}{x} + \frac{mx + n}{x} \rightarrow m$$

$\begin{array}{c} \text{se retta è} \\ \uparrow \\ \text{asint. obliquo} \end{array}$

$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{se retta è} \\ \uparrow \\ \text{asint. obliquo} \end{array}$

$$f(x) - mx = \frac{f(x) - mx - n}{1} + n \rightarrow n$$

Quindi se la retta $y = mx + n$ è asint. obliquo, allora $\frac{f(x)}{x} \rightarrow m$

e $f(x) - mx \rightarrow n$

D'altra parte, se m ed n sono dati dalle formule precedenti, allora

$$\frac{f(x) - mx - n}{m - m} \rightarrow 0, \text{ quindi la retta è asintoto obliquo.}$$