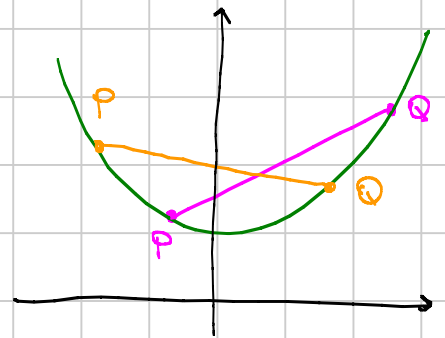


Funzioni convesse concave

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un insieme che rientra in una delle seguenti 3 tipologie

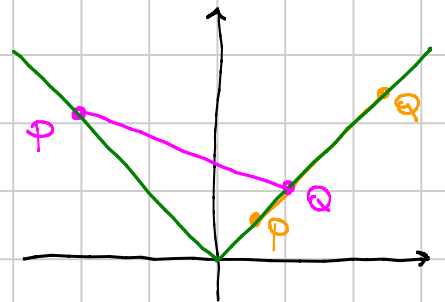
- tutto $\mathbb{R}$
- semiretta destra o sinistra, con o senza estremi: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$
- intervallo, con o senza estremi: (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$.

Def. (geometrica) Sia I come sopra e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è convessa in I se, comunque si prendano 2 p.ti P e Q sul grafico, si ha che tutto il segmento PQ sta "al di sopra" del grafico della funzione. Si dice che f è strettamente convessa se il segmento tocca il grafico solo in P e Q e altrimenti sta veramente sopra.



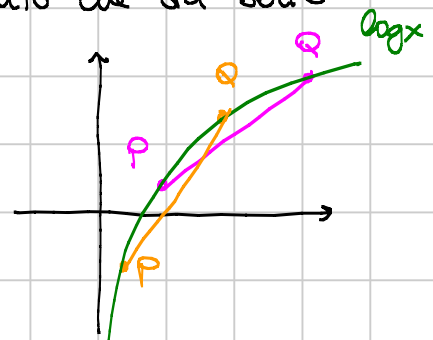
Esempi $f(x) = x^2$ è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

$f(x) = |x|$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$, ma non strettamente convessa (se prendo P e Q "dalla stessa parte", il segmento sta sopra al grafico in senso debole, perché coincide con il grafico stesso).



Def. Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice concava o strettamente concava se vale un discorso simile, solo con il segmento che sta sotto il grafico.

Esempio $f(x) = \log x$ è concava in $(0, +\infty)$

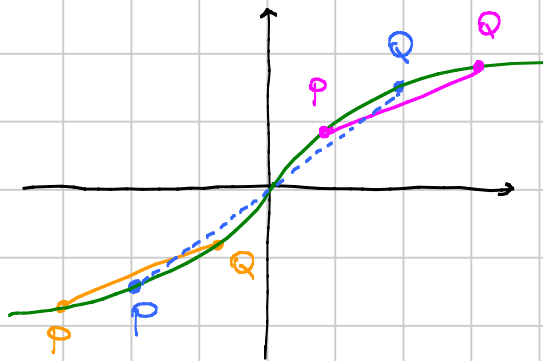


Esempio $f(x) = \arctan x$ è

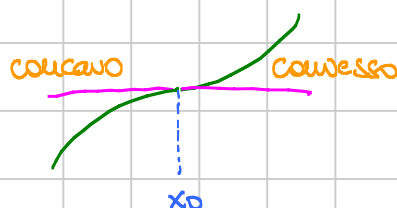
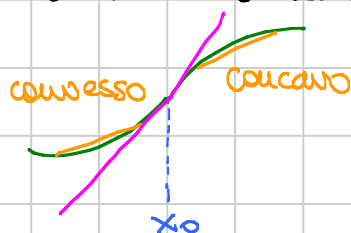
- concava in $[0, +\infty)$
- convessa in $(-\infty, 0]$

Globalmente, cioè su tutto $\mathbb{R}$, non è né concava, né convessa.

Ci sono anche segmenti che non stanno né sopra, né sotto il grafico.



Def. Un p.to x_0 si dice p.to di flesso se $f(x)$ è convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro di x_0 , o viceversa.



In un p.to di flesso la retta tangente, se esiste, "attraversa il grafico"

Come riconoscere i tratti di convessità / concavità

Oss. Una funzione convessa o concava non è obbligata ad avere nemmeno la derivata prima (basta pensare a $f(x) = |x|$).
Quindi una ricetta universale basata sulle derivate non c'è.

Teorema (convessità / concavità sulla base della derivata seconda).

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in I$.

Allora abbiamo che:

- ① f strett. convessa in $I \Rightarrow f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$ **FALSO**
- ② f convessa in $I \Rightarrow f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$
- ③ $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I \Rightarrow f$ strett. convessa in I
- ④ $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \Rightarrow f$ convessa in I .

Achtung! Se anche f è strett. convessa in I , posso dedurre solo che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Esempio $f(x) = x^4$ è convessa STRETTAMENTE su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia
 $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$ si annulla per $x=0$.

Oss. Per la concavità valgono discorsi analoghi solo con <0 e ≤ 0 per $f''(x)$

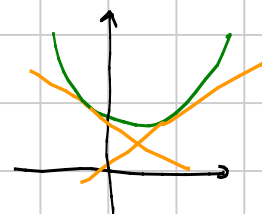
Achtung! Se in un p.to x_0 si annulla $f''(x)$, NON è detto che x_0 sia un p.to di flesso. Potrebbe essere un p.to di max/min, dipende dalle derivate successive.

Proprietà delle funzioni convesse Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

① $f'(x)$ è crescente (strettamente o debolmente a seconda dei casi).

[Se esiste $f''(x)$, il segno di $f''(x)$ è legato alla monotonia di $f'(x)$]

② $f(x)$ sta "sopra" le rette tangenti al suo grafico.



[Dim.: supponiamo che esista $f''(x)$, allora per Taylor-Lagrange abbiamo che

$$\boxed{f(x)} = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + \boxed{\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ ≥ 0 perché $f''(c) \geq 0$ e $(x-x_0)^2 \geq 0$

Equazione della retta tang.
al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$
(passa per il p.to giusto e ha
coeff. angolare giusto)

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

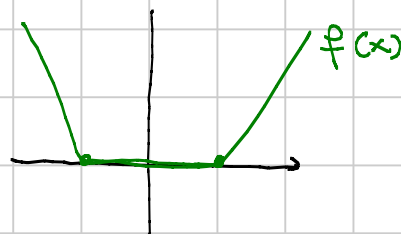
Quindi $f(x) \geq$ retta tangente.

Esercizio Se $f(x)$ è convessa, quante soluzioni al max può avere $f(x) = 0$?
Infinite !!!

E se fosse strettamente convessa?

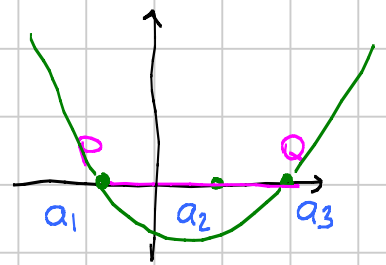
Al massimo 2 !!!

Perché?



Supponiamo che ce ne siano almeno 3: a_1, a_2, a_3 . Vuol dire che $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$

Considero i p.ti P, Q corrispondenti ad a_1 ed a_3 . Il grafico deve stare sotto (veramente) al segmento PQ , quindi in a_2 f non può valere 0.



— 0 — 0 —

Def. (vera) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

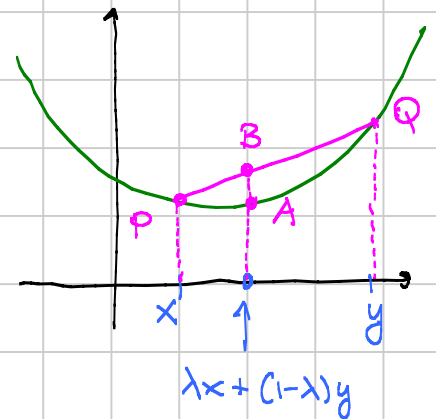
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

p.to generico
compreso fra x
e y

ordinata di B

ordinata di A

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \\ \forall \lambda \in [0, 1]$$



[Esercizio] $f(x)$ e $g(x)$ strettamente convesse e senza tratti di grafico in comune.

Quante sol. ha al max

$$f(x) = g(x) \quad ?$$