

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 053

Titolo nota

07/11/2012

Formula di Taylor con resto di Lagrange Caso con centro in $x_0 = 0$.

$$f(x) = P_n(x) + O(x^{n+1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

resto di PEANO

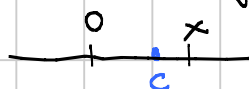
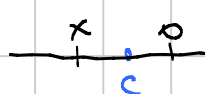
polinomio di Taylor di grado $\leq n$ ~ formula

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

resto alla LAGRANGE

stesso polinomio di prima

Detto meglio: data una funzione $f(x)$ derivabile almeno $(n+1)$ volte, dato un intero $n \in \mathbb{N}$, e dato un punto $x \in \mathbb{R}$, esiste un p.to c compreso tra 0 e x per cui vale la formula di sopra.



Oss. Se scrivo esplicitamente la formula per $P_n(x)$ ottengo

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{al posto di 0}}$$

$P_n(x)$

Resto di Lagrange, che è il "termine successivo" con c al posto di 0.

Oss. Per $n=0$ la formula diventa

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(c)}{1!}x, \quad \text{cioè } f(x) = f(0) + f'(c)x$$

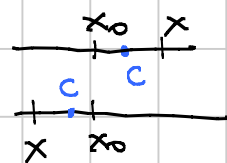
cioè $f(x) - f(0) = f'(c) \cdot x$, cioè il teorema di Lagrange.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

Oss. Una formula analoga vale con centro in un p.to $x_0 \neq 0$.
Si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \leftarrow \text{resto di LAGRANGE}$$

Ovviamente c sta in un p.to misterioso tra x e x_0



Dim. Pongo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Quali sono le proprietà di $\varphi(x)$.
Come visto a suo tempo, si ha che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Inoltre } \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \boxed{P_n^{(n+1)}(x)} = f^{(n+1)}(x)$$

0 perchè la derivata $(n+1)$ -esima di un polinomio di grado $\leq n$ è sempre = 0.

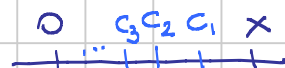
Voglio dimostrare che

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \quad \text{Questo è equivalente alla tesi.}$$

Lemma Sia $\varphi(x)$ una funzione tale che $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.
Allora

[all'epoca di Taylor-Peano la tesi era che $\varphi(x) = o(x^n)$]
si ha che esiste c compreso tra 0 e x tale che

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$



$$\text{Dim. Lemma} \quad \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1) \cdot c_1^n} \leftarrow \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}$$

Cauchy con $f(x) = \varphi(x)$
 $g(x) = x^{n+1}$

$$= \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(c_0)}{(n+1) \cdot c_1^n - (n+1) \cdot 0^n} = \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1) \cdot n \cdot c_2^{n-1}} \quad \begin{array}{l} \leftarrow f'(c_2) \\ \leftarrow g'(c_2) \end{array}$$

Cauchy con $f(x) = \varphi'(x)$ e $g(x) = (n+1) \cdot x^n$

Procedendo in questo modo per $(n+1)$ passaggi alla fine trovo $\frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$

che è esattamente la tesi.

— o — o —

Applicazione 1 Calcolare $\sin \frac{1}{10}$ in maniera approssimata.

Uso Taylor con $n=4$ $P_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

$$\begin{aligned} \text{Invece di scrivere } \sin \frac{1}{10} \text{ scrivo } P_4\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} \\ &= \frac{600 - 1}{6.000} = \frac{599}{6000} \end{aligned}$$

Domanda: se approssimo $\sin \frac{1}{10}$ con $\frac{599}{6000}$, quale errore commetto?

$$|f(x) - P_4(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5 \right| \quad \text{Taylor-Lagrange con } n=4$$

$$\left| \sin \frac{1}{10} - \frac{599}{6.000} \right| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{|f^{(5)}(c)|}{12.000.000} \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Infatti $|f^{(5)}(c)| = |\cos c| \leq 1$. Più in generale, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $|f^{(k)}(c)| \leq 1$, qualunque sia c (e $f(x) = \sin x$).

Conclusione: l'errore commesso è $\leq \frac{1}{12.000.000}$

$$\text{Riprova: } \frac{599}{6.000} = 0,099833\boxed{3}3 \quad \sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}...$$

Quindi c'è un errore di 1 sulla settima cifra decimale.

— o — o —

Applicazione 2 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

1° modo Pongo $f(x) = e^x - 1 - x$ e dimostro, studiando la funzione, che $f(x) \geq 0$ sempre [Esercizio]

2° modo Taylor-Lagrange con $f(x) = e^x$ e $n=1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2$$

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{e^c}{2} x^2}_{\geq 0} \geq 1 + x$$

— 0 — 0 —

Applicazione 3 Dimostrare che la serie di Taylor di $f(x) = \cos x$ converge per ogni x al valore $\cos x$, cioè

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Devo dimostrare che le somme parziali convergono a $\cos x$, ma le somme parziali sono proprio i polinomi di Taylor. Allora per Taylor-Lagrange abbiamo che

$$|\cos x - P_n(x)| = \left| \frac{\overbrace{f^{(n+1)}(c)}^{\text{compreso tra } -1 \text{ e } 1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

↓
somma parziale

→ 0 per $n \rightarrow +\infty$
perché fattoriale batte esponenziale

Oss. Funzionava in maniera simile anche con e^x :

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{\overbrace{e^c}^{\leq e^x} |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

0 c x
| | |

$$\leq e^x \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{\text{per } n \rightarrow +\infty} 0$$

— 0 — 0 —