

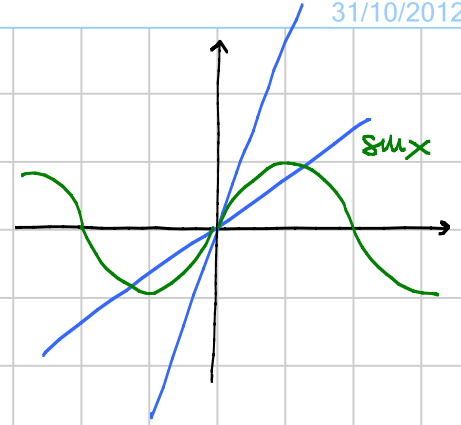
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 052

Titolo nota

31/10/2012

Esempio 1 Risolvere l'eq. $\sin x = x$

Se sovrappongo i grafici, non è chiaro come si intersecano. Quindi è PERICOLOSO !!!



Metodo sicuro: risolvere $x - \sin x = 0$
" $f(x)$

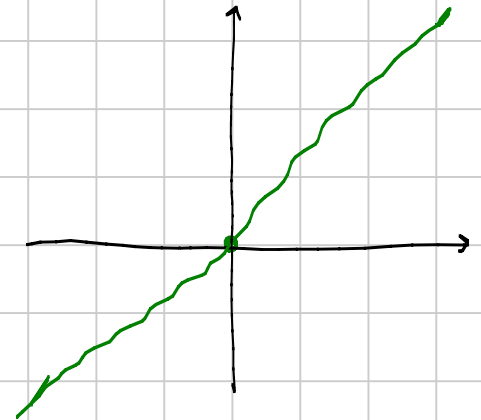
Punto 1 $f(x)$ è DISPARI (differenza di 2 funzioni dispari).
NON è periodica,

Punto 2 $f(x)$ definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Da queste sole informazioni posso già concludere che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi l'equazione ha almeno una soluzione.



Oss. $f(0) = 0$, quindi $x = 0$ è soluzione

Punto 3 Zeri e segno. Dovrei risolvere $f(x) = 0$, cioè $\sin x = x$, che è quello che non sono capace a fare.

Punto 4 Derivata e monotonia: f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 - \cos x$. È facile vedere che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo basta per dire che f è DEBOLMENTE crescente.

Ci piacerebbe che lo fosse strettamente

Vado a vedere dove $f'(x)$ si annulla. Risolvo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ sempre e $f'(x) = 0$ per $x = 2k\pi$, cioè sporadicamente (non in un intero intervallo)

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$.

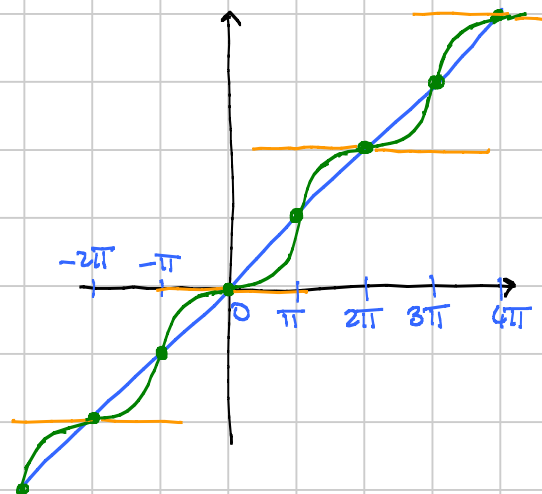
Una volta che è strett. cresc. è iniettiva, dunque l'eq. ha sol. unica.
— 0 — 0 —

Oss. Abbiamo dim. che $f(x) = x - \sin x$ è strett. crescente.

Che succede alle oscillazioni causate dal $\sin x$?

Sappiamo che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$

$$\begin{aligned} \text{Inoltre } f(x) = x &\Leftrightarrow \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \end{aligned}$$



Oss. I p.ti $x = 2k\pi$ sono p.ti in cui $f'(x) = 0$, quindi sono p.ti stazionari (retta tangente orizzontale). Si tratta per forza (essendo f monotona) di p.ti di flesso a tang. orizz. ascendenti (esercizio: verificarlo con il criterio delle derivate successive).

Conclusione La funzione $f(x) = x - \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva, quindi l'eq. $f(x) = \lambda$ ha sempre un' unica soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
— 0 — 0 —

Esempio 2 Risolvere la disequazione $x + 2 \sin x \geq 0$
" $f(x)$

Punto 1 f è DISPARI

Punto 2 Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Punto 3 Zerì e seguo. Non lo so fare (per ora).

Punto 4 Derivata e zone di monotonia. Derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 + 2\cos x$. Ora $f'(x)$ può essere sia > 0 sia < 0

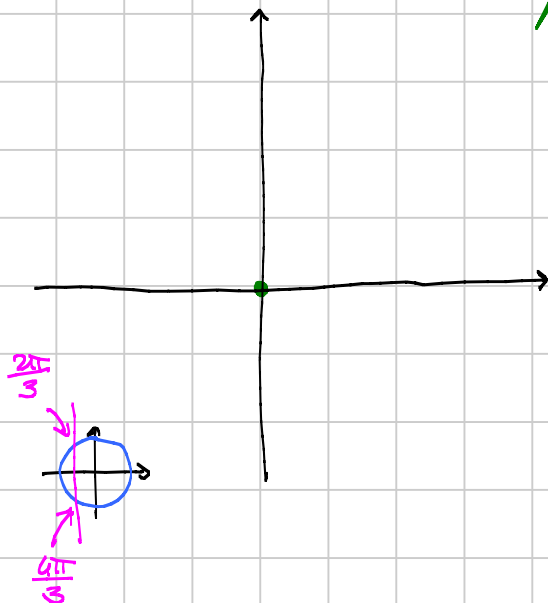
Oss. $f(0) = 0$ e $f'(0) = 3$. Quindi dopo 0 per un po' cresce, ma prima o poi decresce.

Risolve $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

percorso

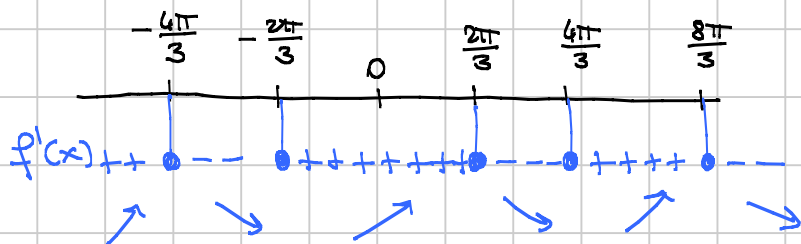
$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ oppure } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$



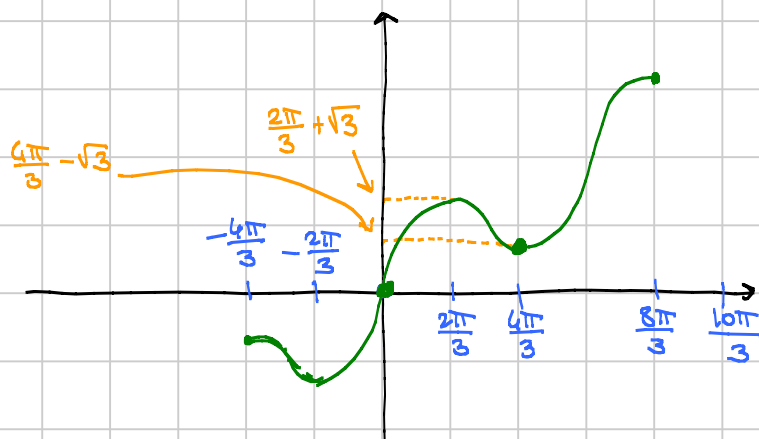
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

(evitare cose del tipo $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ o simili)

Rappresentiamo la situazione



Riportiamo questo sul grafico di $f(x)$



$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{2\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Dopo $x = \frac{2\pi}{3}$, $f(x)$ scende. Ma quanto? Arriva sotto o oppure no?

Basta calcolare $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}} - \boxed{\sqrt{3}} > 2$
 > 4 < 2

Quindi scende, ma anche nel minimo è > 0 .

Per $x < 0$ la situazione è completamente analoga, solo ribaltata.

In $\frac{10\pi}{3}$ non c'è rischio che $f(x) < 0$ per vari motivi

1° motivo $\frac{10\pi}{3} > 10$, quindi $\frac{10\pi}{3} - 2\sin(\text{motivo}) > 8$

2° motivo $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ quindi

$$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ > \frac{4\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$$

Sostanzialmente: in tutti i punti pericolosi il sin vale uguale, ma x vale di più che in $\frac{4\pi}{3}$. Quindi se è andata bene in $\frac{4\pi}{3}$, va bene in tutti gli altri.

Conclusione: $x + 2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Questo risponde anche al punto 3.

— 0 — 0 —