

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 051

Titolo nota

31/10/2012

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: tracciare approssimativamente il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto il suo insieme di definizione.

Esempio 1 $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Punto 1

Verificare se ci sono simmetrie (pari, dispari, periodica): se ci sono basta tracciare una parte del grafico.

In questo caso nessuna simmetria.

Punto 2

Zona di definizione, continuità, limiti agli estremi della zona

In questo caso f è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè per $x \neq 0$, e in tale zona è continua.

espou. batte poleuta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0^+}{-\infty} \right] = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

Inizio a rappresentare in un grafico queste prime info.

Punto 3

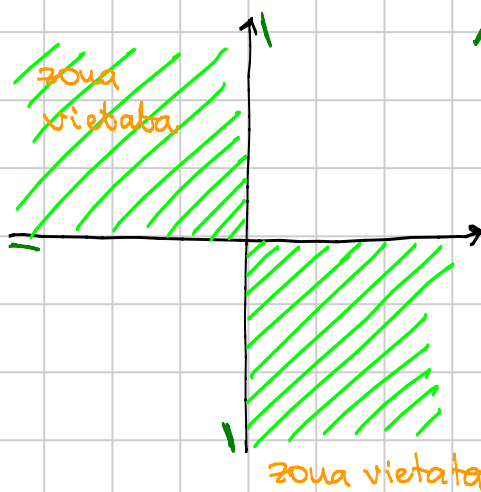
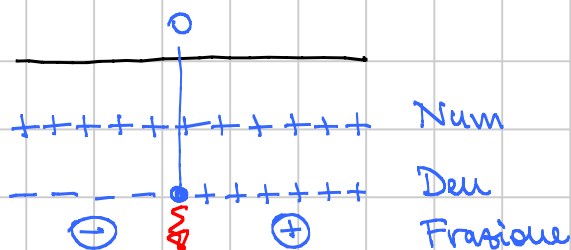
Zeri e segno: risolvere

$$f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{MAI}$$

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$



Punto 4

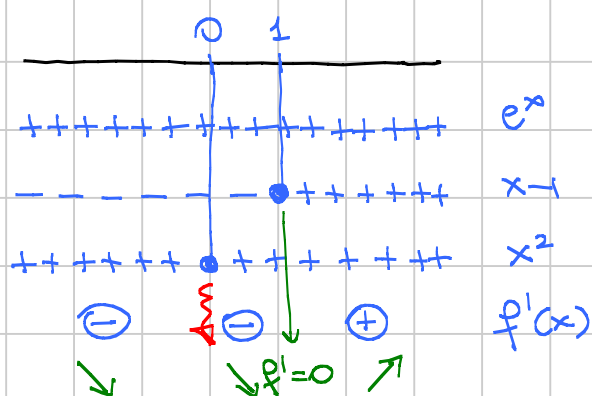
Studio della derivata e zone di monotonia. Determinare

→ dove esiste $f'(x)$

→ il segno di $f'(x)$ (cioè risolvere $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$)

Nell'esempio $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (composizione e/o op. algebriche a partire da funzioni derivabili) e

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{Studio zeri e segno di } f'(x)$$



Quindi

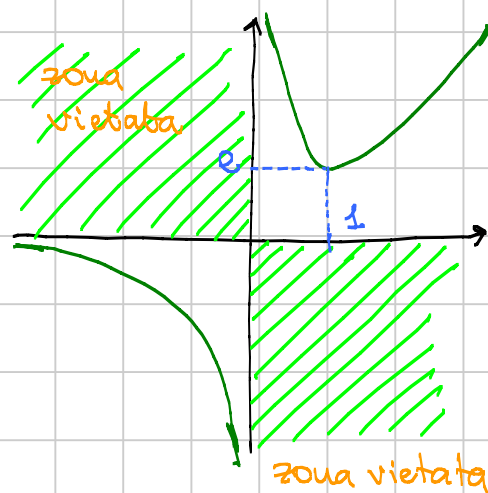
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

Siamo ora in grado di confermare il grafico con gli intervalli di monotonia.

Può essere utile calcolare $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$



Andare avanti nello studio dipende dagli obiettivi per cui si sta studiando la funzione.

Potrebbe essere interessante studiare: → asintoti

→ pti di max/min locale/globale

→ zone di convessità/concavità

→ LIPSCHITZIANITÀ

— 0 — 0 —

Possibili obiettivi per cui uno potrebbe aver studiato la funzione:

① Problema di inf/sup/max/min, ad esempio per e^x insieme

$$\left\{ \frac{e^x}{x} : x > 0 \right\} = \text{valori assunti da } f(x) \text{ al variare di } x > 0$$

Nell'esempio $\sup = +\infty$, $\max$ N.E., $\inf = \min = e$ con p.to di minimo $x=1$,

Altro esempio $\inf/\sup/\max/\min \left\{ \frac{e^x}{x} : x \in [-4, -2] \right\}$

In questo caso $\max = \sup = f(-4) = -\frac{1}{4e^4}$ con p.to max $x=-4$

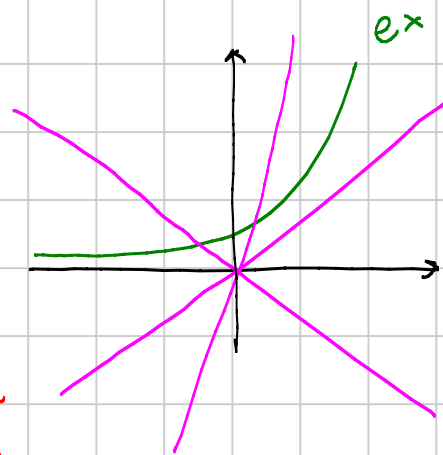
$\min = \inf = f(-2) = -\frac{1}{2e^2}$ con p.to di min $x=-2$.

② Risoluzione di equazioni: ad esempio l'equazione $\frac{e^x}{x} = 2012$ ha esattamente 2 soluzioni: una in $(0,1)$, una in $(1, +\infty)$.

Lo stesso discorso vale per equazioni parametriche: determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x$$

1° modo Sovrapporre i grafici:
disegnare e^x e λx



Sconsigliatissimo: SPESSO è difficile stabilire

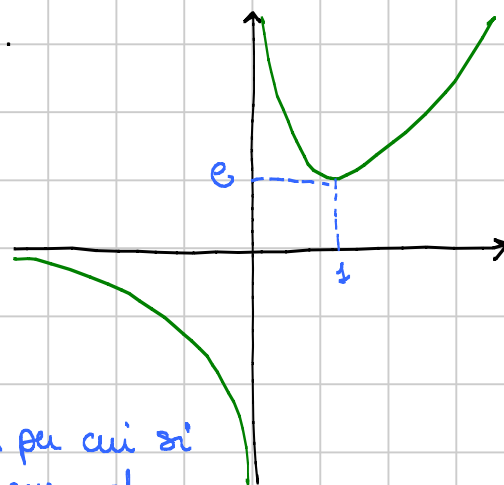
la posizione relativa di 2 grafici

Ad esempio è quasi impossibile stabilire per quale valore di λ la retta è tangente a $y = e^x$

2° modo Isolare il parametro e ridursi a $f(x) = \lambda$.

Nell'esempio $e^x = \lambda x$ diventa

$$\frac{e^x}{x} = \lambda \text{ e ci si riduce alla funzione prec.}$$



L'equazione ha pertanto

→ 1 soluzione se $\lambda \in (-\infty, 0) \cup \{e\}$

→ 0 soluzioni se $\lambda \in [0, e)$

→ 2 soluzioni se $\lambda \in (e, +\infty)$

↑ valore di λ per cui si
ha la tangenza che
prima non si vedeva.

Esempio 2 $e^x = \lambda x^2$

Se sovrappongo i grafici

Isolando il parametro ci ritroviamo a risolvere

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

Studio rapido di $f(x)$

Punto 1 Nessuna simmetria

Punto 2 Definita e continua per $x \neq 0$

Punto 3 $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$

Punto 4 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

Studio zeri e segno di $f'(x)$

Quindi l'equazione ha

→ 0 sol. per $\lambda \in (-\infty, 0]$

→ 1 sol. per $\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$

→ 2 sol. per $\lambda = \frac{e^2}{4}$

→ 3 sol. per $\lambda > \frac{e^2}{4}$

[Esercizio: interpretare a posteriori il numero di soluzioni alla luce dei due grafici sovrapposti]

Capire in particolare che succede per $\lambda = \frac{e^2}{4}$.

