

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 050

Titolo nota

27/10/2012

C $\Rightarrow$ H Dimostriamo un caso speciale di De L'Hôpital, cioè il caso in cui si fa

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e del tipo } \frac{0}{0}$$

Posso estendere $f(x)$ e $g(x)$ per $x = x_0$

ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

In questo ottengo funzioni f e g che sono

- continue in $[x_0, x]$
 - derivabili in (x_0, x)
 - cuoltre $g'(x) \neq 0$ tra x_0 e x
- } ipotesi burocratiche del teorema di De L'Hôpital

Applico CAUCHY in $[x_0, x]$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{0}{f(x_0)}}{g(x) - \underset{0}{g(x_0)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{per un opportuno } c \in (x_0, x)$$

Ad essere preciso, c dipende da x , quindi sarebbe più corretto scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

Ora faccio il limite per $x \rightarrow x_0$. Essendo per i Cauchiani ho che $c(x) \rightarrow x_0$, quindi

$$\boxed{x_0} \leq \boxed{c(x)} \leq \boxed{x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 x_0 x_0 x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{pongo} \\ y = c(x) \end{matrix}$$

— o — o —

Esercizio Rifare il discorso per $x \rightarrow x_0^-$

L $\Rightarrow$ M Teorema di monotonia 2] (segno di f' in un intervallo)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, che supponiamo continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora valgono queste conclusioni.

① f debolmente crescente in $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

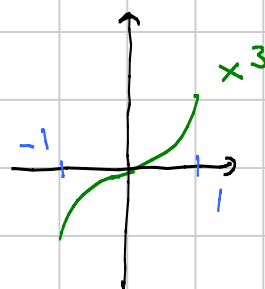
② f strettamente " " $\Rightarrow f'(x) > 0$ " "

③ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b) \Rightarrow f$ debolmente crescente in $[a, b]$

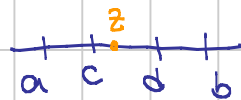
④ $f'(x) > 0$ " $\Rightarrow f$ strettamente " "

Achtung! Se anche f è strettamente crescente, posso solo dedurre che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Esempio $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$
 f è strett. cresc., ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $[-1, 1]$ (in un p.to).



Dim. di ③ Siano c e d due p.ti in $[a, b]$ con $c < d$.
Voglio dimostrare che $f(c) < f(d)$.



Applico Lagrange nell'intervallo $[c, d]$. Ottengo che $\exists z \in (c, d)$ t.c.

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(z)}_{\geq 0 \text{ per ipotesi}} \geq 0, \text{ cioè } f(d) \geq f(c).$$

Dim. di ④ Come prima arrivo a

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(z)}_{>0 \text{ per ipotesi}} > 0, \text{ cioè } f(d) > f(c).$$

Dim. di ① Per ipotesi f è debolmente crescente. Voglio dim. che $f'(x) \geq 0$.
 ≥ 0 in quanto $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{R \\ > 0}}$$

Ne segue che il limite è ≥ 0 essendo limite di cosa ≥ 0 .

Esercizio: vedere che succede quando $h \rightarrow 0^-$.

Non Dim. di ② Cosa succede se f è dirett. cresc. Per $R > 0$ ho che $\frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} > 0$, quindi il rapporto incrementale è sempre > 0 .

Tuttavia le disuguaglianze strette non passano al limite, quindi quando faccio il lim per $R \rightarrow 0^+$ ottengo solo ≥ 0 .

— 0 — 0 —

Oss. Monotonia 2 vale con ovvie modifiche nel caso decrescente.

— 0 — 0 —

Esempio 1 Consideriamo l'equazione $x^5 + 2x = \sin x + 2012$. Quante soluzioni ha? E se cambio 2012 con un $\lambda \in \mathbb{R}$ generico?

Pongo $f(x) = x^5 + 2x - \sin x$ e l'eq. diventa $f(x) = \lambda$

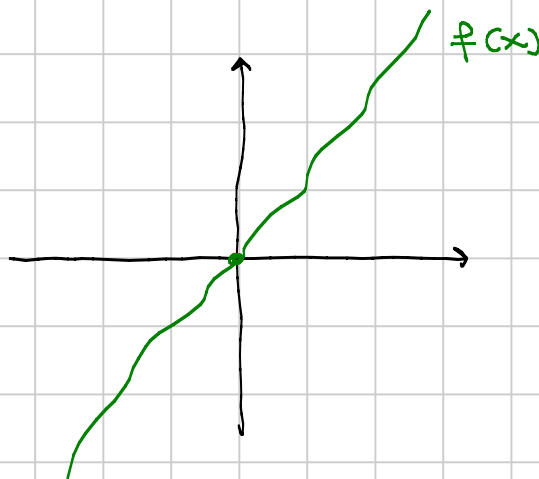
Osservo intanto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e f è

continua in ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f , vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione.

Ora $f'(x) = 5x^4 + 2 - \cos x \geq 5x^4 + 1 \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, quindi iniettiva, quindi c'è al massimo una soluzione.

Conclusione: per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione.



MONOTONIA 3

Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ in (a, b) .

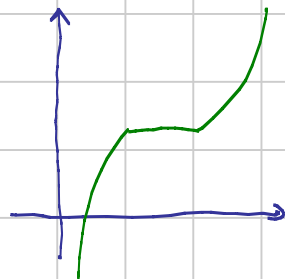
Supponiamo inoltre che $f'(x)$ si annulli al più SPORADICAMENTE, cioè che non si annulli in un intero intervallo.

Allora f è strettamente crescente.

Dim. Già sappiamo che è debolmente crescente perché $f'(x) \geq 0$.

Se non fosse strett. crescente, vorrebbe dire che il grafico ha un tratto piatto.

Ma allora avremmo che $f'(x) = 0$ in tutto l'intervallo del tratto piatto, ma abbiamo supposto che questo non succeda.



Conseguenza. Per dim. che una funzione è iniettiva, basta dim.
che $f'(x) \geq 0$ e $f'(x)$ si annulla al più sporadicamente.
— o — o —