

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 049

Titolo nota

27/10/2012

$$W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$$

Teorema di ROLLE Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

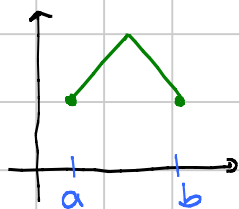
Supponiamo che

- ci) f continua in $[a, b]$,
- cii) f derivabile in (a, b) , (se è derivabile in $[a, b]$ ancora meglio)
- ciii) $f(a) = f(b)$.

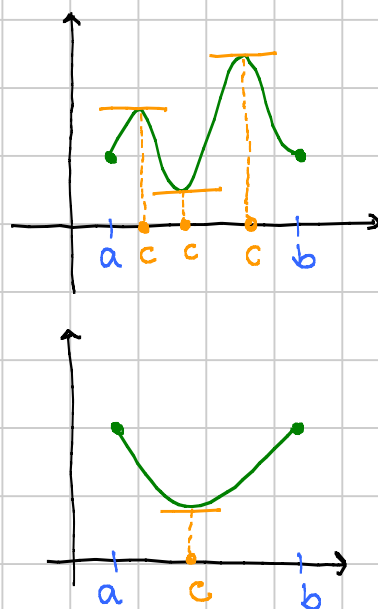
Allora esiste almeno un pto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Oss. Il punto c può anche non essere unico.

Oss. 2 Basta che f sia non derivabile anche in un solo pto interno e la tesi salta.



In questo esempio $f'(x)$ non si annulla mai (ma c'è un pto in cui non esiste).



Dim. Grazie all'ipotesi ci) posso applicare W., il garantisce l'esistenza di punti di max / min, i quali rientrano nelle 3 tipologie.

→ Se i pti di max / min fossero tutti sul bordo, allora max e min coinciderebbero per l'ipotesi ciii), quindi $f(x)$ sarebbe costante, quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, quindi avrei infiniti c . In realtà tutti i pti sarebbero sia di max sia di min.

→ Pertanto esiste almeno un pto di max o min che è in (a, b) . Non può essere sul bordo interno per l'ipotesi cii). Quindi è stazionario interno, cioè è il c cercato.

— o — o —

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che

(i) f e g sono continue in $[a,b]$,

(ii) f e g sono derivabili in (a,b) .

Allora esiste almeno un valore $c \in (a,b)$ tale che

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c). \quad 1^a \text{ tesi}$$

Se inoltre supponiamo che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

allora abbiamo anche che $g(b) \neq g(a)$ e dividendo otteniamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad 2^a \text{ tesi}$$

Dim. Poniamo $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

Proprietà di $\varphi(x)$:

(i) φ è continua in $[a,b]$ (multiplo di $g(x) \pm$ multiplo di $f(x)$, o meglio combinazione lineare di $g(x)$ ed $f(x)$)

(ii) φ è derivabile in (a,b) (stesso motivo).

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$. Si tratta di fare il conto

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) \\ &= \boxed{f(b)g(a)} - \cancel{f(a)g(a)} - \boxed{g(b)f(a)} + \cancel{g(a)f(a)} \\ \varphi(b) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ &= \cancel{f(b)g(b)} - \boxed{f(a)g(b)} - \cancel{g(b)f(b)} + \boxed{g(a)f(b)} \end{aligned}$$

Posso dunque applicare ROLLE a $\varphi(x)$. Ottengo che esiste $c \in (a,b)$ t.c.

$$\varphi'(c) = 0. \quad \text{Ma } \varphi'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$$

Pertanto l'uguaglianza $\varphi'(c) = 0$ è equivalente alla 1^a tesi.

Supponiamo ora che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora dico che $g(a) \neq g(b)$.
 Se infatti fosse $g(a) = g(b)$, potrei applicare ROLLE a $g(x)$ e ottenere che esiste $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$, il che è contro l'ipotesi.
 Una volta che $g(a) \neq g(b)$ posso dividere e la prima tesi diventa la seconda tesi.

— o — o —

Oss. Prendiamo $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $[a,b] = [-1,1]$.

Allora $g(a) \neq g(b)$, quindi posso considerare

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Quindi la frazione a sc della 2ª tesi ha senso. Esiste $c \in (-1,1)$ t.c.

$\frac{f'(c)}{g'(c)} = 0$? NO, dovrebbe essere $f'(c) = 0$, cioè $2c = 0$, cioè $c = 0$,
 ma allora anche $g'(x) = 3x^2$ si annullerebbe.

Si noti che in questo caso vale la 1ª tesi, ma non vale la 2ª tesi
 (in realtà non è verificata l'ipotesi (iii) perché $g'(x)$ si annulla).

— o — o —

Teorema di LAGRANGE Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b) .

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$$

Dim. 1 Posso riscrivere la tesi come $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$

Questo è proprio Cauchy con $g(x) = x$ (infatti $g(b) - g(a)$ diventa $b-a$ e $g'(c) = 1$)

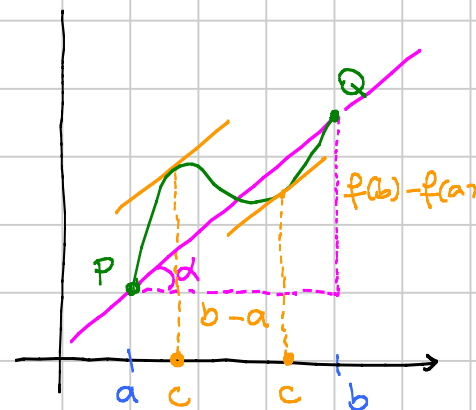
— o — o —

Interpretazione geometrica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \rightarrow \text{coeff. ang. retta tangente al grafico in } (c, f(c))$$

coefficiente angolare
della retta PQ

Lagrange dice che esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$
in cui la retta tangente è parallela alla
retta PQ



Oss. Se P e Q fossero alla stessa altezza, cioè $f(b) = f(a)$, avrei
almeno un p.to in cui la retta tangente è orizzontale, cioè il
teorema di Rolle.

Brutalmente: Lagrange è un Rolle "storto".

Dim. 2 Considero $\varphi(x) = f(x) - \text{equazione della retta PQ}$

Si osserva facilmente che

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad (f(x) \text{ e retta coincidono in P e Q}).$$

Quindi posso applicare Rolle a $\varphi(x)$ ottenendo un p.to c t.c. $\varphi'(c) = 0$.

Ma

$$\varphi'(c) = f'(c) - \text{coeff. ang. retta} \quad (\text{ho usato che la derivata di una retta è il coeff. angolare})$$

Essendo $\varphi'(c) = 0$ sarà

$$f'(c) = \text{coeff. ang. retta} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

— o — o —

Oss. La $\varphi(x)$ della dim. 2 è praticamente la stessa di Cauchy.