

TEOREMI CALCOLO DIFFERENZIALE

$W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

H

M

gibi
vista $\rightarrow \Downarrow$
T

WEIERSTRASS

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HOPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$ $\leftarrow$ Massimo di f in A , cioè
massima quota raggiunta
da $f(x)$ quando x varia in A
"Mondo y "

se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x \in A$ b.c. $f(x) = M$.

Per il minimo la situazione è analoga: $m = \min \{ f(x) : x \in A \}$ se

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x \in A$ b.c. $f(x) = m$.

Gli eventuali valori della x in cui $f(x) = M$ oppure $f(x) = m$ si dicono p.ti di max oppure p.ti di min

Achtung terminologico! Massimo = massimo valore (è una y)

Punto di massimo = ciascuno dei valori della x
suo $\uparrow$ della x in cui f vale il massimo

Idee per il minimo.

Osservazioni ① Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere (inf e sup invece sì)

② Se esistono sono per forza unici

③ I p.ti di max/min esistono $\Leftrightarrow$ esistono max e min e non sono obbligati ad essere unici.

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.
 ↑ intervallo (quindi insieme limitato)
 estremi COMPRESI

Allora $\max \{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $\min \{f(x) : x \in [a,b]\}$ esistono per forza.

Achtung! Se le ipotesi non sono verificate, ad esempio perché l'insieme è del tipo (a,b) , cioè non ci sono gli estremi, allora max e min potrebbero non esistere, ma anche esistere.

Esempi

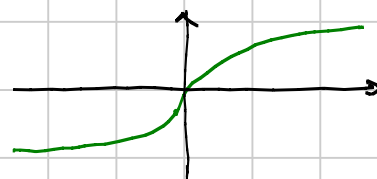
$$\max \{ \arctan x : x \in \mathbb{R} \} = \text{N.E.}$$

$$\sup \{ \arctan x : x \in \mathbb{R} \} = \frac{\pi}{2}$$

perché non c'è nessun $x \in \mathbb{R}$
 tale che $\arctan x = \frac{\pi}{2}$

$$\inf \{ \arctan x : x \in \mathbb{R} \} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\min \{ \arctan x : x \in \mathbb{R} \} = \text{N.E.}$$



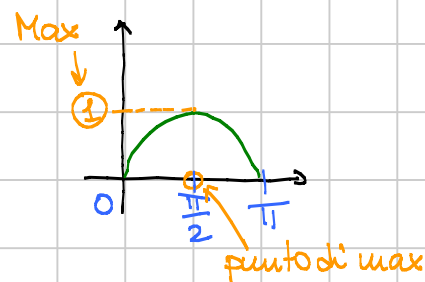
$$\max \{ \sin x : x \in (0, \pi) \} = 1$$

In questo caso esiste ma W non si applica

$$\min \{ \sin x : x \in (0, \pi) \} = \text{N.E.}$$

$$\inf \{ \sin x : x \in (0, \pi) \} = 0$$

non c'è nessun pto $x \in (0, \pi)$ in cui $\sin x = 0$.



RICERCA DEI PUNTI DI MAX/MIN

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per W so che max e min esistono. Come li trovo?

Basta trovare i pti di max/min e poi sostituire i valori.

Come li trovo? Cercandoli in 3 categorie di pti

- ① Pti STAZIONARI INTERNI: pti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- ② Pti SINGOLARI INTERNI: pti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- ③ Pti del BORDO: $x = a$ e $x = b$

Operativamente si procede così:

→ si trovano tutti i p.ti di tipo ①, ②, ③: questi sono i candidati ad essere i punti di max/min

→ li sostituisco tutti in $f(x)$: dove vale di + è il max, dove vale di meno è il min.

— 0 — 0 —

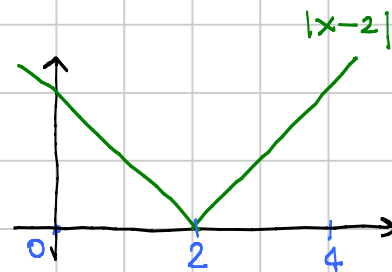
Esempio 1 $f(x) = |x-2|$ $[a,b] = [0,4]$

$$\max \{ |x-2| : x \in [0,4] \} = 2$$

P.ti di max: $x=0$ e $x=4$ (categoria bordo)

$$\min \{ |x-2| : x \in [0,4] \} = 0$$

P.to di min: $x=2$ (categoria singolare interno)



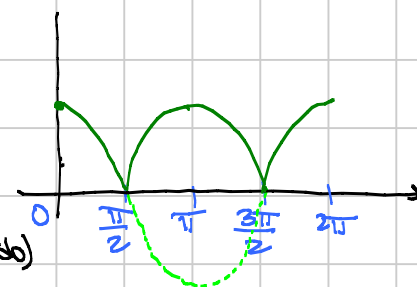
Esempio 2 $f(x) = |\cos x|$ $[a,b] = [0, 2\pi]$

$$\max \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 1$$

p.ti di max: $x=0$ (bordo), $x=\pi$ (sing. int.), $x=2\pi$ (bordo)

$$\min \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 0$$

p.ti di min: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ (singolari interni)



Dim. del fatto che i p.ti di max/min rientrano in una delle 3 tipologie. Facciamo il caso dei p.ti di max.

Per W. esistono, quindi da qualche parte devono stare. Sia x_0 p.to di max.

→ Se x_0 è sul bordo, allora è in categoria 3.

→ Se x_0 è interno e $f'(x_0)$ non esiste, allora è in categoria 2.

→ Se x_0 è interno e $f'(x_0)$ esiste, devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$, così finisce in categoria 1.

Primo approccio: uso monotonia 1. Se fosse $f'(x_0) > 0$, allora un po' a dx di x_0 si ha che $f(x) > f(x_0)$, il che non è possibile perché $f(x_0)$ è il max. Se fosse $f'(x_0) < 0$, allora $f(x) > f(x_0)$ per gli x un po' a sx di x_0 , il che non è possibile. L'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

Secondo approccio: visto che $f'(x_0)$ esiste la calcoliamo con il rapporto incrementale.

Per $R > 0$ ho che $\frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} \leq 0$, ma allora

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} \leq 0 \quad (\text{limite di cosa } \leq 0).$$

≤ 0 (come prima)

Per $R < 0$ ho che $\frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} \geq 0$, ma allora

$$\lim_{R \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} \geq 0 \quad (\text{limite di cosa } \geq 0)$$

Poiché $f'(x_0)$ esiste i due limiti devono essere uguali e coincidere con $f'(x_0)$, che quindi può solo essere $= 0$.

Esercizio: ripetere tutti i ragionamenti per i pti di minimo.

Esempio 3 $f(x) = x - x^3$ $[a,b] = [0,1]$

Max e min non si vedono "a occhio". Cerco i candidati

① Stab. interni: $f'(x) = 0$, $1 - 3x^2 = 0$, $x^2 = \frac{1}{3}$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Quindi il unico pto in $(0,1)$ è $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

② Sing. interni: $\emptyset$ perché $f'(x)$ esiste ovunque

③ Bordo: $x=0$ e $x=1$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

pti di min MIN pto di max MAX

