

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^5 - \arctan(x^3) = 2012$$
 ha almeno una soluzione reale.

1° modo Pongo $f(x) = x^5 - \arctan(x^3)$. Osservo che è continua in $\mathbb{R}$ e che $f(0) = 0$, $f(10) = 10^5 - \arctan(10^3) > 2012$.
 Applico il teo. dei valori intermedi in $[0, 10]$ e ottengo l'esistenza di almeno una soluzione $x \in (0, 10)$.

Oss. Il teo. fornisce l'esistenza. Non dice nulla
 → sull'unicità eventuale (aspettiamo domani)
 → su come trovare la soluzione (ma quando si sa che le soluzioni esistono ci sono dei metodi per calcolarle in maniera approssimata)

2° modo Osservo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Quindi f , vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione reale.

Esempio 2 Dimostrare che l'equazione $x^5 - \arctan(x^3) = 0$ ha almeno 3 soluzioni reali.

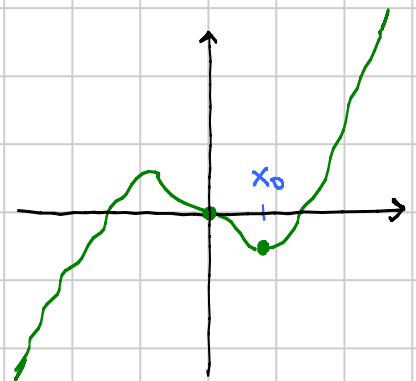
Una soluzione si vede subito: $x = 0$

Se avessi un valore $x_0 > 0$ t.c. $f(x_0) < 0$ avrei un'altra soluzione $x > x_0$.

Come si comporta $f(x)$ vicino a $x = 0$?

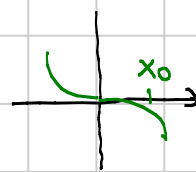
Taylor: $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

$\uparrow$
 $\arctan x^3 = x^3 + o(x^3) \leftarrow$ che mangia x^5



Studio locale $\Rightarrow f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $-x^3$, cioè ha un flesso a tang. orizz. discendente.

Questo vuol dire che un po' a dx di 0 la funzione vale meno che in $x=0$, quindi vale negativo. Questo fornisce l'esistenza dell' x_0 cercato



Per ottenere la 3ª soluzione ci sono 2 metodi

$\rightarrow$ o si ripete il ragionamento per $x < 0$ (esiste un p.to $x_1 < 0$ t.c. $f(x_1) > 0$ e quindi per il limite a $-\infty$ ci sarà una soluzione $x < x_1$)

$\rightarrow$ o si sfrutta che $f(x)$ è dispari, quindi se $f(x)=0$ ha una soluzione $x > 0$ allora ha per forza la soluzione $-x$.

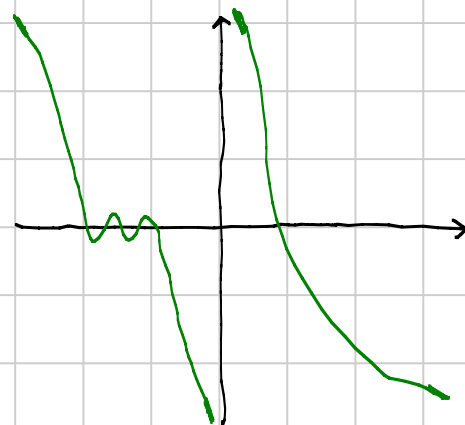
Oss. Ora so anche che $f(x)$ NON è iniettiva (passa almeno 3 volte da 0)

Esempio 3 Consideriamo l'eq. $\frac{1}{x} - x^3 + \arctan(x^2) = 0$.
Ha almeno una soluzione?

Considero $f(x) = \frac{1}{x} - x^3 + \arctan(x^2)$. Questa è continua per $x \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi f è surgettiva NO!! Questo valeva solo se era continua su tutto $\mathbb{R}$ e in questo caso non lo è



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Ora, E SOLO ORA, posso dire che $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva e anche $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva

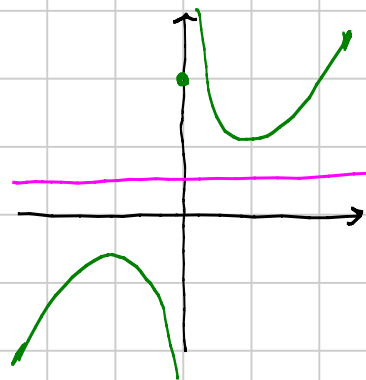
Questo assicura che l'equazione ha almeno una soluzione $x > 0$ e almeno una soluzione $x < 0$.

Achtung! Se $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, sapere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

non bastano a garantire la surgettività.

L'esempio a fianco è continua ovunque, tranne in $x=0$.



— 0 — 0 —

Esempio 4 Sia $a_n = \sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}$.

Domanda: qual è il segno di a_n , per lo meno per n grandi?

(Ad esempio potrebbe servire per lo studio di $\sum a_n$).

1° modo Risolvere la disuguaglianza, ma non si riesce.

2° modo $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ (troppo brutale, cioè mi sono fermato troppo presto nello sviluppo)

$\begin{matrix} \uparrow \\ \arctan x \sim x \\ \sin x \sim x \end{matrix}$

$$a_n \sim \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}}_{\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} \right)}_{\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{6n^3} > 0$$

Questo sembra suggerire che $a_n > 0$ definitivamente.

Come dimostrarlo rigorosamente?

1ª alternativa Calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot n^3 = \frac{1}{6}$

$\uparrow$ si calcola con Taylor

Ma allora definitivamente $a_n \cdot n^3 > 0$, quindi anche $a_n > 0$.

2ª alternativa Pongo $f(x) = \sin x - \arctan x$. Come è fatta $f(x)$ vicino a $x=0$?

$\downarrow$ Taylor

$$f(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3} \right) + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Quindi si comporta come $\frac{1}{6}x^3$ cioè così:



Quindi $f(x) > 0$ per x positivo piccolo.

Pertanto $f(\frac{1}{n}) > 0$ per n abbastanza grande.

Oss. È ora facile dire che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (c.a. con $\frac{1}{n^3}$)

Esempio 5 Consideriamo $f(x) = x^7 + \sin(x^3) + \arctan(x^6)$
Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? È surgettiva?

Surgettiva SI: basta fare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. Vengono $\pm\infty$ per colpa (o merito) del $\sin$.

Iniettiva NO: vicino a 0 si comporta come x^6 in quanto

$$f(x) = x^6 + o(x^6)$$

$\Rightarrow$ minimo locale $\Rightarrow$ addio iniettività.

