

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

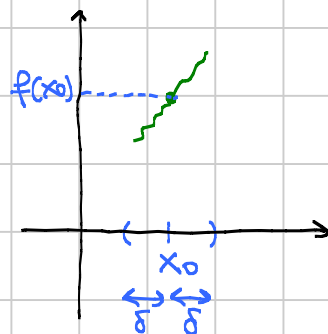
Obiettivo: capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to x_0 dato.

Teo. Monotonia 1 Supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ t.c.

$$f(x) > f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0, x_0 + \delta]$$

$$f(x) < f(x_0) \text{ per ogni } x \in [x_0 - \delta, x_0)$$

(un po' prima di x_0 la funzione vale meno che in x_0
un po' dopo x_0 la funzione vale più che in x_0)



Oss. Se fosse $f'(x_0) < 0$ la tesi sarebbe

$$f(x) > f(x_0) \text{ per ogni } x \in [x_0 - \delta, x_0) \quad \leftarrow \text{un po' prima di } x_0$$

$$f(x) < f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0, x_0 + \delta] \quad \leftarrow \text{un po' dopo } x_0.$$

Dim. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$
 $\uparrow$ per ipotesi

Questo dice che, per valori di h vicini a 0, il rapporto incrementale è > 0 .
Più precisamente $\exists \delta > 0$ t.c. rapp. increm. > 0 per ogni $h \in [-\delta, \delta], h \neq 0$.

Allora ci sono due casi

① Se $h \in (0, \delta]$ il denom. è > 0 , quindi anche num. > 0 , quindi
 $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$, cioè $\underline{f(x_0 + h) > f(x_0)}$
 un po' dopo x_0 , f vale di più che in x_0

② Se $h \in [-\delta, 0)$ il denom. è < 0 , quindi num. < 0 , quindi
 $f(x_0 + h) < f(x_0) \leftarrow$ un po' prima di x_0 , f vale di meno che in x_0 .
 — 0 — 0 —

Achtung! NON HO DETTO che esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x)$ è monotona
 in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
 — 0 — 0 —

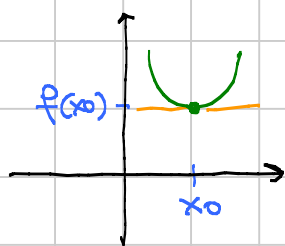
Oss. L'ipotesi di monotonia 1 riguarda il segno di f' in un solo p.to x_0 .

Domanda: cosa accade se $f'(x_0) = 0$.

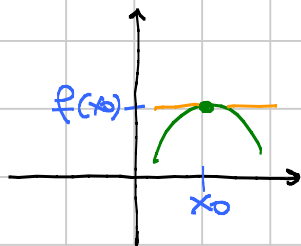
Definizione I p.ti x tali che $f'(x) = 0$ si dicono punti stazionari di $f(x)$.

Domanda tradotta: come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0 stazionario.

Ci sono 5 possibilità:



MINIMO LOCALE
(RELATIVO)



MASSIMO LOCALE
(RELATIVO)



FLESSO A TANGENTE
ORIZZONTALE
ASCENDENTE



FLESSO A TG.
ORIZZ.
DISCENDENTE

un po' dopo vale di +

--

un po' dopo vale di +

--

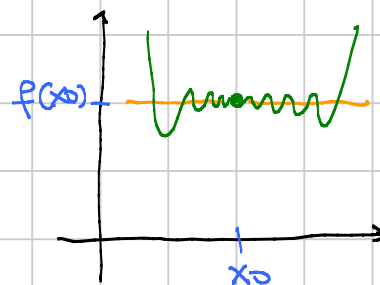
un po' prima vale di +

--

un po' prima vale di -

--

La quinta possibilità è che sia prima
sia dopo la funzione valga sia
di più sia di meno



Come riconoscere in quale situazione ci si trova?

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE $f'(x_0) = 0$. Cerco una derivata
successiva che sia $\neq 0$. Supponiamo quindi che ci sia un intero $k \geq 2$
tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

(La prima derivata $\neq 0$ in x_0 è la k -esima)

Allora

- ① Se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ abbiamo minimo locale
- ② Se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ " massimo locale
- ③ Se k è dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ abbiamo ...
- ④ Se k è dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ " ...



Oss. Il caso ⑤ si può presentare solo se le derivate successive di ordine k prima di diventare $\neq 0$ oppure sono tutte nulle.

Dim. Le derivate successive, calcolate in x_0 , entrano in gioco nei polinomi di Taylor con centro in $x_0 = 0$.
Considero il polinomio di grado k :

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{f''(x_0)}{2!}R^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}R^k + o(R^k) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}R^k + o(R^k) \quad (\text{tutte le altre derivate sono 0 per ipotesi}) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi} \quad f(x_0 + R) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}R^k + o(R^k) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Divido per R^k e faccio il limite per $R \rightarrow 0$. Ottengo

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R^k} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \underbrace{\frac{o(R^k)}{R^k}}_0 = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ci sarebbero 4 casi

- ① Supponiamo $f^{(k)}(x_0) > 0$ e k pari. Poiché il limite viene > 0 , esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è > 0 per $R \in [-\delta, \delta]$ con $R \neq 0$.
 - Se $R \in (0, \delta]$ il denom. è pos., quindi num è pos., quindi $f(x_0 + R) > f(x_0)$, quindi un po' dopo vale di +.
 - Se $R \in [-\delta, 0)$ il denom. è pos. (k è pari), quindi num è pos., quindi $f(x_0 + R) > f(x_0)$, quindi un po' prima vale di +.

Questa è la situazione del minimo locale

④ Supponiamo che $f^{(k)}(x_0) < 0$ e k dispari. Perché il limite viene < 0 , esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è < 0 per $R \in [-\delta, \delta]$ con $R \neq 0$.

• Se $R \in (0, \delta]$ il denom. è > 0 , quindi num. < 0 , cioè

$f(x_0 + R) < f(x_0)$, cioè un po' dopo vale di $-$

• Se $R \in [-\delta, 0)$ il denom. è < 0 , quindi num. > 0 , cioè

$f(x_0 + R) > f(x_0)$, cioè un po' prima vale di $+$

Questa è la situazione del flesso a tg. orizz. discendente
 $\text{---} \text{---} \text{---}$

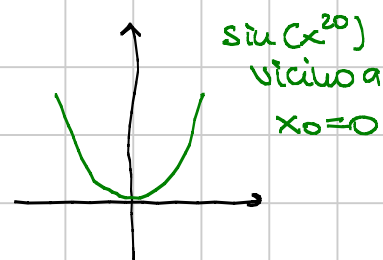
[Esercizio: fare i 2 casi restanti].

Traduzione del criterio delle derivate successive Una funzione si comporta vicino ad un suo p.to stazionario come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = \sin(x^{20})$ $x_0 = 0$ (si verifica che è un p.to stas.)

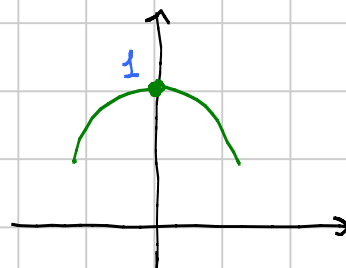
$f(x) = \boxed{x^{20}} + o(x^{20})$
 ↑ primo termine non nullo e non costante

Quindi $f(x)$ si comporta come x^{20} , cioè ha un minimo locale



Esempio 2 $f(x) = \cos(\arctan x)$ $x_0 = 0$ (stazionario)

$f(x) = \cos(x + o(x^2))$
 $= 1 - \boxed{\frac{1}{2}x^2} + o(x^2)$
 ↑ primo termine non nullo e non costante



Quindi c'è un massimo locale,