

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 045

Titolo nota

26/10/2012

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

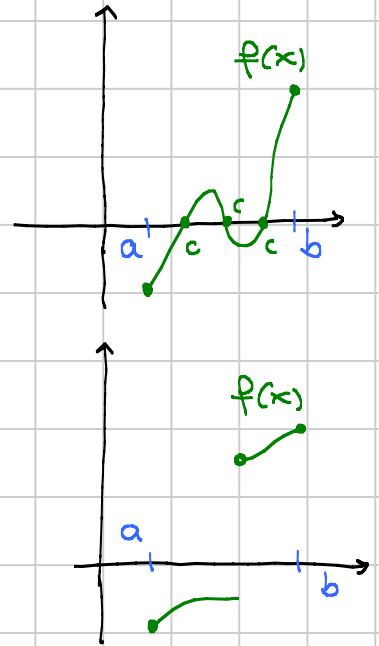
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (\text{cioè } f(a) \text{ e } f(b) \text{ hanno segno diverso})$$

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Disegno: il punto c non è obbligato ad essere unico.



Oss. ① La continuità è fondamentale

② È fondamentale avere a che fare con i numeri reali.

Ad esempio se prendo $f(x) = x^2 - 2$

$[a, b] = [0, 2]$ ho che

$f(0) = -2$, $f(2) = 2$, il punto in mezzo in cui si annulla è $x = \sqrt{2}$. La funzione

funirebbe bene anche vista come $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, ma l'annullamento avviene in un p.to $c \notin \mathbb{Q}$.

Idea della dimostrazione Facciamo il caso in cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (l'altro caso è simmetrico).

Pongo $c = \inf \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$

Dico che $f(c) = 0$.

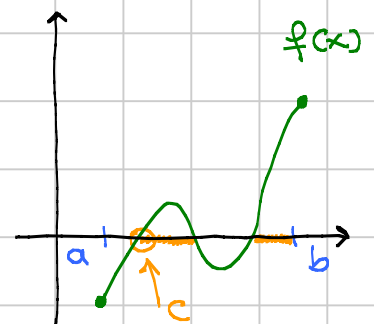
Cosa vuol dire che c è l'inf dell'insieme.

Vuol dire 2 cose

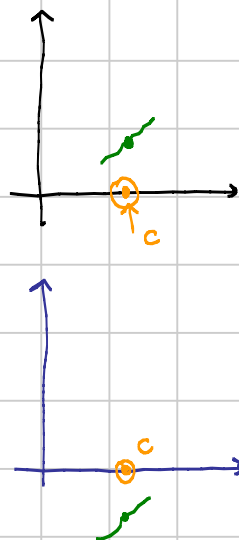
(i) $f(x) \leq 0$ se $x \leq c$ (e $x \in [a, b]$)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in [c, c + \varepsilon]$ tale che $f(x) > 0$

Voglio dimostrare che $f(c) = 0$. Basta che escluda che $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$.



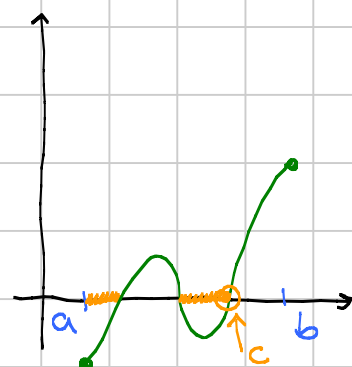
- Se fosse $f(c) > 0$, allora $f(x)$ sarebbe > 0 in tutto un intervallo centrato in c , ma questo andrebbe contro (i), in quanto $f(x)$ sarebbe > 0 anche un po' prima di c .
- Se fosse $f(c) < 0$, allora $f(x)$ sarebbe < 0 in tutto un intervallo centrato in c , e questo andrebbe contro (ii).



L'unica possibilità rimasta è che sia $f(c) = 0$.

Oss. Potrei scrivere la dimostrazione anche in "versione sup" ponendo

$$c = \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$



Il ragionamento per escludere che $f(c) > 0$ o $f(c) < 0$ è del tutto analogo (rifare per esercizio).

Si noti che le due costruzioni hanno prodotto c diversi, ma non importa.

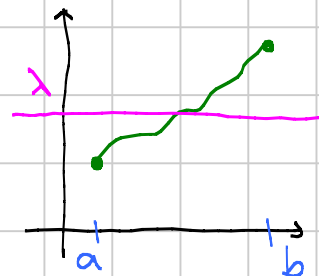
Esercizio: potevo fare la stessa cosa usando $f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq 0$.

Prima variante Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$, o viceversa.

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f(c) = \lambda.$$



Dim. Pongo $g(x) = f(x) - \lambda$ e ho che

- $g(x)$ è continua
- $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$

Per il teorema precedente $\exists c \in (a, b)$ t.c. $g(c) = 0$, cioè

$$f(c) - \lambda = 0, \text{ cioè } f(c) = \lambda.$$

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione $x^2 - \sin(x^3) = 2012$ ha almeno una soluzione $x > 0$.

Pongo $f(x) = x^2 - \sin(x^3)$. Si tratta di una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Osso che $f(0) = 0 < 2012$ e $f(1000) = 1.000^2 - \sin(1.000^3) > 2012$
abbondante

Per il teorema di esistenza degli zeri (prima variante) applicato con $[a, b] = [0, 1.000]$ sappiamo che $\exists c \in (0, 1.000)$ t.c. $f(c) = 2012$. Questa è la soluzione $x > 0$ cercata.

Oss. Al posto di 1.000 potevo usare un qualunque valore x con $x^2 > 2013$ (il sin al max toglieva 1).

Oss. 2 Allo stesso modo posso dimostrare che l'eq. $x^2 - \sin(x^3) = 2012$ ha almeno una soluzione $x < 0$. Basta usare il teorema in $[-1.000, 0]$.

Esempio 2 Sia $f(x) = x^7 + \log(1+x^6) - \sin(x^5)$.

Domanda: vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è surgettiva?

Devo vedere se, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale. Essendo $f(x)$ continua, basta trovare un p.to a in cui $f(a) < \lambda$ e un p.to b in cui $f(b) > \lambda$ e poi usare il teorema.

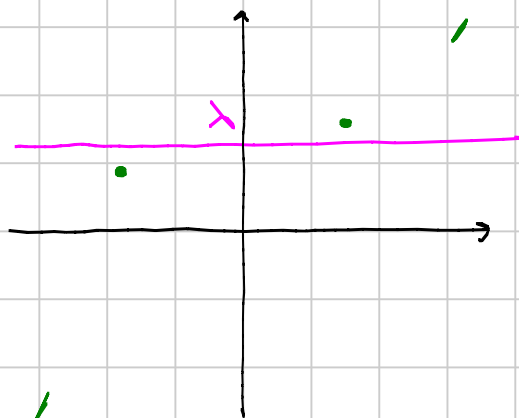
Osso che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{potenza batte log.})$$

Questo basta per garantire l'esistenza di a e b come sopra. La fatica la fa la definizione di limite:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ vuol dire che
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists k$ t.c. $f(x) \geq \lambda$
per ogni $x \geq k$



Fatto generale Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (\text{o viceversa})$$

Allora f è surgettiva.

Variaute Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Allora è automaticamente surgettiva.

Esempio $f(x) = \log x + \arctan(e^x + x^3)$
è surgettiva come $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

