

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 044

Titolo nota

25/10/2012

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  Serie di potenze con  $c_n = \frac{1}{n}$

① Per quali  $x$  converge?  $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 = L$   
 $\uparrow \sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$

Quindi  $R = \frac{1}{L} = 1$ , quindi la serie di sicuro converge per  $x \in (-1, 1)$  e non converge per  $x < -1$  e  $x > 1$ .

Restano da vedere a mano  $x = 1$  e  $x = -1$ .

Per  $x = 1$  ottengo la serie armonica  $\sum \frac{1}{n}$  che diverge.

Per  $x = -1$  ottengo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

La quale converge per Leibnitz.

Conclusione: la serie converge se e solo se  $x \in [-1, 1)$

② A cosa converge quando converge? Bisogna vederla come serie di Taylor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Assomiglia  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$\uparrow$   
cambiamo  
segni termini dispari

Quindi  $-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

La formula vale per tutti gli  $x$  per cui la serie converge, cioè  $\forall x \in [-1, 1)$

In particolare ponendo  $x = -1$  (che è nella zona di conv.) abbiamo

$$-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Esempio 3 Voglio calcolare  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ .

Ricorda il caso  $x=1$  della serie di potenze  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ .

Questa è la serie di potenze di  $f(x) = \arctan x$ , quindi quando la serie converge la sua somma è proprio  $\arctan x$ .

Quindi se la serie converge la sua somma è  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

In notazione compatta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Chi è  $c_n$ ?  $c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Quindi  $\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Quindi  $\sqrt[n]{|c_n|}$  non ha limite, dunque  $L$  non esiste e non posso applicare immediatamente il teo. 2.

Rimedio:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$

$y = x^2$

Mi chiedo per quali valori di  $y$  converge la serie.

Quella in  $y$  è una nuova serie di potenze con  $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$  a cui posso applicare il teorema 2:

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1.$$

Quindi la serie in  $y$  converge quando  $|y| < 1$ , quindi quella in  $x$  converge quando  $|x^2| < 1$ , cioè per  $x \in (-1, 1)$ .

Resterebbero da vedere a mano  $x=1$  e  $x=-1$ . In entrambi i casi converge per Leibnitz.

Esempio 3  $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{3^n + 7^n}{2^n + 5^n}} x^n$   $\hookrightarrow c_n$

Domanda: per quali valori di  $x$  converge? Uso teorema 2.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n + 7^n}{2^n + 5^n}} \rightarrow \frac{7}{5} = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{5}{7}$$

$\uparrow$  raccolgo  $7^n$  sopra e  $5^n$  sotto...

Quindi la serie

- converge di sicuro per  $x \in \left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$
- non converge di sicuro per  $x < -\frac{5}{7}$  e  $x > \frac{5}{7}$
- restano da vedere  $x = \pm \frac{5}{7}$ .

$\boxed{x = \frac{5}{7}}$  Ottengo  $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{3^n + 7^n}{2^n + 5^n} \frac{5^n}{7^n}}$  che non converge perché manca la cond. necessaria

$a_n \rightarrow 1$

$\boxed{x = -\frac{5}{7}}$  Ottengo  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{3^n + 7^n}{2^n + 5^n} \cdot \frac{5^n}{7^n}}$  e ancora una volta manca la cond. necessaria.

$a_n \rightarrow 1$

Conclusione: la serie data converge  $\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$ .

Esempio 4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$  Serie di potenze con  $c_n = \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 \cdot 3^n}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow \frac{1}{3} = L \Rightarrow R = 3$$

Controllo  $x = \pm 3$ .  $\boxed{x = 3}$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{n^2 \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$  converge

$\boxed{x = -3}$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$  converge

(sia per Leibnitz  
sia per assoluta c.)

Conclusione: la serie data converge, e anzi converge assolutamente, per ogni  $x \in [-3, 3]$

— 0 — 0 —

Esempio 5  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^a + n + 2}$  Per quali valori di  $a$  converge?

Brutale: se  $a \leq 1$  si ha  $a_n \sim \frac{n^2}{n} = n \Rightarrow$  diverge  
 se  $a > 1$  si ha  $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$  e questa converge quando  $a-2 > 1$ , cioè  $a > 3$ .

Rigoroso: confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n^{a-2}}$  (per lo meno per  $a > 1$ )  
 D'altra parte per  $a \leq 1$  manca pure la cond. necessaria.

Esempio 6  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^a + n^5 - 14}{n^{17} + 3n^{12} - 22}$   
 $\downarrow a_n$

Osservazione iniziale:  $a_n > 0$  almeno definitivamente ( $n$  num e denom tendono a  $+\infty$ , quindi sono definitiv.  $> 0$ )

Si ha convergenza se e solo se  $a < 16$

Brutale:  $a_n \sim \frac{n^a}{n^{17}} = \frac{1}{n^{17-a}}$  e questa converge  $\Leftrightarrow 17-a > 1$   
 $\Leftrightarrow a < 16$

Se  $a \leq 5$ , allora  $a_n \sim \frac{n^5}{n^{17}} = \frac{1}{n^{12}}$  e la serie converge.

[Rigoroso: esercizio]

Esempio 7  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 5}{n^a + n^4 + 7}$

Questa converge per tutti i valori di  $a$ . Questo perché sotto c'è GIÀ  $n^4$  che sconfigge il termine  $n^2$

Rigoroso: confronto asintotico da subito con  $b_n = \frac{1}{n^2}$   
 (occhio che ci si può ritrovare nel caso limite, ma dalla parte giusta, quando  $a > 4$ ).  
 $\quad \quad \quad \_0 \_0 \_$