

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 043

Titolo nota

25/10/2012

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

dove i c_n sono numeri assegnati, detti coefficienti, ed $x \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Bruttalmente: serie di potenze = polinomio di grado infinito.

Domande :

- ① Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?
- ② Per i valori di x per cui la serie converge, quanto fa la somma (cioè il limite delle somme parziali).

Oss. Una serie di potenze converge sempre ALMENO per $x=0$. In tal caso la somma fa c_0 .

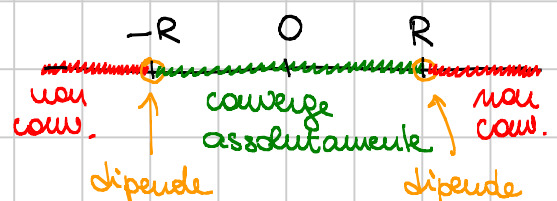
Teorema 1 (Raggio di convergenza) Data una serie di potenze, esiste un R (con $R \geq 0$ oppure $R = +\infty$) tale che

- (i) Se $|x| < R$ la serie converge e converge assolutamente,
- (ii) se $|x| > R$ la serie NON converge, anzi non verifica nemmeno la condizione necessaria,
- (iii) se $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, allora dipende dai casi (e può essere anche una situazione diversa in R e $-R$).

Interpretazione

La zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine e di ampiezza R a dx e sx

↑
raggio di convergenza



Casi speciali ① Se $R = +\infty$, allora la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

② Se $R = 0$, allora la serie converge a c_0 per $x = 0$, e non converge per ogni $x \neq 0$.

Nella dimostrazione si otterrebbe che $R = \sup \{x : \text{la serie converge in } x\}$.

Teorema 2 (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L \quad (\text{con } L \geq 0 \text{ oppure } L = +\infty)$$

Allora

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{con ovvio significato se } L = 0 \text{ oppure } L = +\infty)$$

Osservazione La formula permette di calcolare R purché il limite esista.

Se il limite non esiste, allora R esiste comunque (lo dice il teorema 1), ma non si calcola con questa formula.

Dim. Sia L come nell'enunciato. Supponiamo per semplicità che sia $L > 0$ e $L \in \mathbb{R}$ (lascio fuori i casi $L = 0$ e $L = +\infty$).

(i) Studio $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n x^n}_{a_n}$ usando l'assoluta convergenza. Mi riduco a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questa la studio con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L |x|$$

Dal criterio della radice otteniamo che se $L|x| < 1$, cioè $|x| < \frac{1}{L}$

si ha che

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$ converge, dunque anche

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge e converge assolutamente.

(ii) Se $L|x| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{L}$, allora per il criterio della radice applicato ai limiti abbiamo che

$$|a_n| = |c_n| \cdot |x|^n \rightarrow +\infty$$

quindi non è possibile che $a_n \rightarrow 0$, quindi manca la condizione necessaria.

[Esercizio: adattare la dimostrazione ai casi $L=0$ oppure $L=+\infty$]

SERIE DI TAYLOR Sia $f(x)$ una funzione derivabile infinite volte. Si dice serie di Taylor di $f(x)$, con centro $x_0=0$, la serie di potenze che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Detto altrimenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{c_n} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

TEOREMA 3 (Somme di serie di Taylor).

Data la serie di Taylor di una funzione $f(x)$, sotto opportune ipotesi si ha che, per i valori di x per cui la serie converge (cioè quelli all'interno del raggio di convergenza più eventuali estremi) la somma della serie è proprio $f(x)$, quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \text{ per cui la serie converge}$$

Notazione Una funzione si dice **ANALITICA** se verifica le opportune ipotesi. Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante op. algebriche e/o composizioni sono analitiche dove non presentano problemi burocratici

Oss. Taylor diceva che se mi fermo al grado n (cioè uso una somma parziale) commetto un errore che è $O(x^{n+1})$. Se non mi fermo, cioè prendo tutta la serie, allora ottengo proprio $f(x)$.

Esempio Consideriamo la serie

$$1 + \frac{8}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$$

Questa è il caso speciale $x=8$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n!}} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$\boxed{\frac{1}{n!}} = C_n$

① Per quali valori di x converge? Provo ad usare il teorema 2. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}} = 0 = L$$

$\downarrow +\infty$ (tabellina)

Allora $R = \frac{1}{L} = +\infty$, cioè la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque in particolare la serie converge anche per $x=8$ (come avremmo potuto dimostrare direttamente con radice o rapporto).

② A cosa converge? Basta osservare che la serie di potenze è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$, quindi per il teorema 3 converge a e^x per tutti gli x per cui converge (cioè sempre). In particolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8.$$