

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 042

Titolo nota

24/10/2012

Dim. criterio confronto Per ipotesi $0 \leq b_n \leq a_n$ definitivamente.

Per di cambiare un numero finito di termini, posso supporre che sia $0 \leq b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'importante è che cambiare un numero finito di termini non cambia il comportamento delle serie.

$$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Dall'ipotesi segue che (formalmente si dim. per inclusione)

$$S_n^a \geq S_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ci sono 2 casi

• Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, allora vuol dire che $S_n^b \rightarrow +\infty$, ma allora $S_n^a \rightarrow +\infty$ (per il confronto tra limiti), ma allora $\sum a_n < +\infty$ (cioè converge)

• Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora vuol dire che $S_n^a \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora S_n^b non può tendere a $+\infty$, quindi (avendo per forza un limite in quanto debolmente crescente) dovrà per forza tendere ad un numero reale $l_1 \leq l$, quindi $\sum b_n$ converge.

— o — o —

Achtung! Siano A_n e B_n 2 successioni tali che $A_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Se $A_n \rightarrow +\infty$, per forza anche $B_n \rightarrow +\infty$
- Se $B_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora restano aperte 3 possibilità per A_n :
 - tendere a $-\infty$
 - tendere ad un numero $l_1 \leq l$
 - non avere limite.

Achtung 2! Siano A_n e B_n 2 successioni tali che $A_n \overset{\text{stretto}}{<} B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $A_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e che $B_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$.

Allora $l_1 < l_2$ NO!!! Posso solo dire che $l_1 \leq l_2$

Esempio $\overset{A_n}{\frac{1}{n}} < \overset{B_n}{\frac{5}{n}}$ eppure $A_n \rightarrow 0, B_n \rightarrow 0$

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE
NON PASSANO AL LIMITE

Dim. criterio della radice Ci sono due casi

- $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ Applicando il criterio della radice per i limiti sappiamo che $a_n \rightarrow +\infty$, ma allora non c'è la cond. nec., quindi la serie non può convergere, dunque (essendo a termini ≥ 0) non le resta che divergere
- $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$ Ragionando come sopra otteniamo che $a_n \rightarrow 0$, quindi c'è la cond. necessaria, quindi la serie POTREBBE convergere. Così non ho dimostrato nulla ☹️

Nuova partenza:

se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$

da cui

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = b_n \quad \text{definitivamente}$$

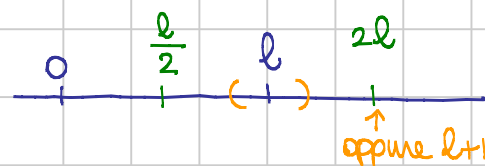
Ora $\sum b_n$ converge in quanto serie geometrica con parametro $\in (-1, 1)$, quindi anche $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto. ☺️

— 0 — 0 —

Dim. confronto asintotico Ipotesi: $a_n \geq 0, b_n > 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$

Per definizione di limite abbiamo che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$$



Moltiplico per b_n (che è > 0) e ottengo che

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n \quad \text{definitivamente}$$

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} 2l b_n$ converge (te. algebrico), dunque (grazie al confronto e alla disug. dx) anche $\sum a_n$ converge

- Se $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{l}{2} b_n = +\infty$, quindi $\sum a_n = +\infty$
↑ confronto + disug. sx

— 0 — 0 —

Confronto asintotico - Casi limite Supponiamo $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$.

- Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ [allora definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$, quindi]

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

- Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ [allora definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ definitiv., quindi]

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} = a_n$

$$\frac{\cos(n!)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

"a_n" "b_n"

$\sum b_n$ converge (armonica con esponente $2 > 1$) $\Rightarrow \sum a_n$ converge

NO bbbb

Il criterio del confronto vale SOLO tra serie a termini ≥ 0 , e
non abbiamo garanzie che $a_n \geq 0$ almeno definitivamente.

Provo con l'assoluta convergenza (Leibnitz non potrebbe funzionare)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2}$$

Ora ho che $0 \leq \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ quindi posso dire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$$

serie armonica
con $2 > 1$

confronto tra
serie a termini
 ≥ 0

Assoluta
convergenza

Dim. assoluta convergenza

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - |a_n| + |a_n| \\ &= |a_n| - (|a_n| - a_n) \end{aligned}$$

quindi

$$\sum a_n = \sum |a_n| - \sum (|a_n| - a_n)$$

Se le 2 serie a dx convergono, allora converge quella di sx (teo. algebrico).

La prima converge per ipotesi.

Per la seconda vale la disuguaglianza

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n| \rightarrow \text{per entrambe le disug. si tratta di fare i casi } a_n \geq 0 \text{ e } a_n \leq 0$$

Ora $\sum 2|a_n|$ converge per ipotesi, quindi anche $\sum (|a_n| - a_n)$ converge per confronto tra serie a termini ≥ 0 .

— 0 — 0 —