

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 04

Titolo nota

24/10/2012

## Criteri per serie a termini di segno variabile

**ASSOLUTA CONVERGENZA** Se  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, allora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

Utilizzo operativo Devo studiare  $\sum a_n$  con i termini  $a_n$  a segno variabile. Provo a studiare  $\sum |a_n|$ . Questa è una nuova serie a termini  $\geq 0$ , alla quale posso applicare tutti i criteri relativi. Ci sono 2 possibilità:

- $\sum |a_n|$  converge. Allora per il criterio anche  $\sum a_n$  converge.
- $\sum |a_n| = +\infty$ . Allora purtroppo BOR, cioè restano aperte 4 possibilità.

Nomenclatura Si dice che  $\sum a_n$  converge assolutamente se  $\sum |a_n|$  converge.

Absoluta convergenza  $\Rightarrow$  convergenza ma non viceversa.

**CRITERIO DI LEIBNITZ** (Criterio per serie a segno alterno)

Consideriamo la

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(-1)^n \alpha_n} = a_n$$

Supponiamo che

- (i)  $\alpha_n \geq 0$  definitivamente
- (ii)  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$  definitivamente
- (iii)  $\alpha_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

(la serie è a segni alterni)

( $\alpha_n$  è debolmente decrescente)

( $\alpha_n$  è infinitesima)

Achtung! Se le 3 ipotesi sono verificate, allora la serie converge.

Se almeno una delle ipotesi non è verificata, allora BOR (restano aperte 4 possibilità)

Oss. È facile osservare che  $a_n \rightarrow 0$  se e solo se  $a_n \rightarrow 0$  (convergenza).  
 Quindi l'ipotesi (iii) è in realtà la condizione necessaria.  
 Quindi se l'ipotesi che fallisce è la (iii), allora manca la cond.  
 necessaria, quindi la serie non può convergere, dunque restano  
 aperte solo 3 possibilità.

Oss. Cosa vuol dire che l'ipotesi (iii) non è verificata? Vuol dire che  
 $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  con  $l \neq 0$ , oppure che  $a_n$  non ha limite.

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{1}{n}}$  Provo ad applicare Leibnitz con  $a_n = \frac{1}{n}$ .  
 "du"

(i)  $a_n \geq 0$  definit. : banale

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n$  definit., cioè  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$  definit. Verifica da percorso:  
 posso moltiplicare in quanto è roba  $> 0$  e ottengo  $n \leq n+1$  che è  
 banalmente vera.

(iii)  $a_n \rightarrow 0$  : banale perché  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Potrei applicare l'assoluta convergenza? NO! Avrei dovuto studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \stackrel{\text{armonica con esponente 1}}{=} +\infty \Rightarrow \text{NO!}$$

Conclusione:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  converge, ma non converge assolutamente.

Esempio 2  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{1}{n^2}}$  "du"

Faccio le verifiche: (i)  $a_n \geq 0$  definit. : banale

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n$  definit. :  $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$  come prima

(iii)  $a_n \rightarrow 0$  : banale.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

La serie converge assolutamente? Proviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ e questa converge (esponente } 2 > 1)$$

Conclusione:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$  converge e converge assolutamente (quindi posso dimostrare la convergenza SENZA usare Leibnitz, ma usando il criterio dell'assoluta convergenza).

Esempio 3  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{1}{n^a}}$  "d<sub>n</sub> dove a è un parametro  $a > 0$

Verifiche Leibnitz: (i)  $d_n \geq 0$  banale  $\forall n \geq 1$

(ii)  $d_{n+1} \leq d_n$  cioè  $\frac{1}{(n+1)^a} \leq \frac{1}{n^a}$  vero  $\forall n \geq 1, \forall a > 0$   
per il solito motivo (denom. + grande, frazione + piccola, valido se è tutto  $> 0$ )

(iii)  $d_n \rightarrow 0$ : vero per ogni  $a > 0$ .

Quindi per Leibnitz la serie converge per ogni  $a > 0$ .

La convergenza assoluta c'è solo per  $a > 1$ .

Riassumendo: la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$$

- converge e converge assolutamente per  $a > 1$ ,
  - converge ma non converge assolutamente per  $0 < a \leq 1$ ,
  - non converge per  $a \leq 0$  (in questo caso manca l'ipotesi (iii), quindi manca la condizione necessaria).
- 0 — 0 —

Punto debole di Leibnitz: verifica ipotesi (ii)

Esempio 4  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+2}{n^3+3}}$  "d<sub>n</sub>

(i)  $d_n \geq 0$ : banale per ogni  $n \in \mathbb{N}$

(iii)  $d_n \rightarrow 0$ : banale

(ii)  $d_{n+1} \leq d_n$ , cioè

$$\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+3} \leq \frac{n^2+2}{n^3+3}$$

se moltiplico il grado diventa alto.

Brutale:  $a_n \sim \frac{1}{n}$ , quindi sembra  $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ , ma non c'è un criterio che giustifica questo modo di procedere (il confronto asintotico vale solo tra serie a termini  $\geq 0$ )

Rimedio rigoroso: aggiungere e togliere  $\frac{1}{n}$ . Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

**SE** le due serie a dx convergono, allora la serie a sx, che è la loro somma, converge pure lei (teo. algebrico).

La seconda serie a dx converge per Leibnitz.

La prima si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+2n - n^3-3}{n(n^3+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}$$

Se per questa provo ad usare Leibnitz, sono da capo con la disuguaglianza.

Se invece uso l'assoluta convergenza devo studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{2n-3}{n^4+3n}} \quad \begin{array}{l} < +\infty \\ \uparrow \\ \text{sinonimo} \\ \text{di "converge"} \end{array} \quad \left( \text{la convergenza segue da un} \right. \\ \left. \text{confronto asintotico con } \sum \frac{1}{n^3} \right)$$

$\sim \frac{1}{n^3}$

Quindi la prima serie converge assolutamente.

Conclusione:

→ la serie di partenza è somma di 2 serie convergenti, quindi converge a sua volta

→ la serie di partenza non è assolutamente convergente, in quanto  $|a_n| \sim \frac{1}{n}$