

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 040

Titolo nota

20/10/2012

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitivamente e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0 \neq +\infty \quad (\text{casi standard})$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè una converge se e solo se converge l'altra (ma il valore a cui convergono potrebbe essere diverso).

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$. Cerco in tabellina una $\sum b_n$ in maniera tale che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$. Se la trovo, allora la serie iniziale si comporta come $\sum b_n$.

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+7}$ Non si trova una formula per le somme parziali,

Intanto $a_n \geq 0$ sempre, quindi o converge o diverge a $+\infty$.

Ora $a_n \rightarrow 1$ (banale limite), quindi manca la condizione necessaria, quindi di sicuro non converge. Resta come unica possibilità che DIVERGA a $+\infty$.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+6}{2^n}$ $a_n \geq 0$ sempre e $a_n \rightarrow 0$, quindi POTREBBE convergere.

Criterio della radice : $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2+6}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ (radice n -esima di polinomio)

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Criterio del rapporto : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+6}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+6} = \frac{1}{2} \frac{n^2+2n+7}{n^2+6} \rightarrow \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ come sopra

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+5}{7n^3+4}$
 a_n

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \rightarrow 0$, quindi POTREBBE convergere

Radice e rapporto non funzionano (viene $l=1$)

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{7n^3} = \frac{1}{7n} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$. Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$ la quale diverge in quanto armonica gen. con $a=1$

Rigoroso: faccio il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2+3n+5}{7n^3+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3n+5}{7n^3+4} \cdot n = \frac{1}{7} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{20}+3}{n^{22}+5n+7}$

$a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$ quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^{20}}{n^{22}} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ armonica con $a=2 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{20}+3}{n^{22}+5n+7} \cdot n^2 = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

La serie data si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$, cioè converge.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
 a_n

$a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$ (fattoriale vs esponenziale)

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{\cancel{3^n} \cdot 3}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Quindi la serie data converge

Ejemplo 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 6^n} \quad a_n \geq 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ e $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$ è una serie geometrica
con $a \in (-1, 1) \Rightarrow$ converge

Rigrosso: confronto asintotico con $b_n = \frac{5^n}{6^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 6^n} \cdot \frac{6^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{5^n} \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)}{\cancel{6^n} \left(\left(\frac{3}{6} \right)^n + 1 \right)} \cdot \frac{\cancel{6^n}}{\cancel{5^n}} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi la serie data si comporta come $\sum b_n$, cioè converge.

Esempio 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)$$

"an"



Problema segue non c'è. Infatti $\frac{n+3}{n^2+5} \rightarrow 0^+$, quindi $0 < \frac{n+3}{n^2+5} < \pi$ definitivamente, quindi $a_n = \sin(\dots) > 0$ definitivamente.

Brutale: $a_n \sim \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{\text{sviluppi}}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{1}{n}} = \boxed{\sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)} \cdot \boxed{\frac{n+3}{n^2+5} \cdot n} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

quindi...

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) = a_n \quad a_n \rightarrow 0$

Brutale: $a_n = \sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ Troppo brutale !!!

$$a_n \sim \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}}_{\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}} - \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}}_{\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{6n^3} \Rightarrow \text{converge}$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$. Si ritrova il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$\uparrow$ $x = \frac{1}{n}$ $\uparrow$ Taylor

$\frac{1}{6} \neq 0 \neq +\infty$, quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$, cioè converge.

— 0 — 0 —