

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 038

Titolo nota

20/10/2012

SERIE NUMERICHE

Data una successione a_n , si indica con

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la somma degli infiniti termini della successione.

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Si definiscono somme parziali gli elementi della successione

$$S_0 = a_0, \quad S_1 = a_0 + a_1, \quad S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Sommatoria (non serie): somma di un numero FINITO di numeri

Si definisce la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Serie, cioè somma di un numero INFINITO di addendi (numeri) come il limite della successione S_n

Procedimento: data a_n , si costruisce S_n , ed il limite di S_n è la serie,

Essendo un limite, una serie ha 4 possibili comportamenti

→ converge ad un certo $l \in \mathbb{R}$ se $S_n \rightarrow l$

→ diverge a $+\infty$ se $S_n \rightarrow +\infty$

→ " " $-\infty$ " $S_n \rightarrow -\infty$

→ è indeterminata se S_n non ha limite,

Esempio banale 1 $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 0$

Si verifica facilmente (ufficialmente per induzione) che $S_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $S_n \rightarrow 0$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$,

Esempio banale 2 $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora (facile induzione) che

$S_n = n+1$, quindi $S_n \rightarrow +\infty$, quindi

c'è anche a_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

(la serie diverge a $+\infty$)

Esempio banale 3 $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si verifica che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi $S_{2n} \rightarrow 1$, $S_{2n+1} \rightarrow 0$,
quindi S_n non ha limite dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ è INDETERMINATA}$$

— 0 — 0 —

SERIE TELESOPICHE

Esempio 1 $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ per $n \geq 1$ considero sdo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Come sono fatte le somme parziali S_n ? $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\text{Allora: } S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \dots$$

L'idea è che venga $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Dim per induzione. Passo base $n=1$ fatto sopra

Passo induttivo: Ipotesi $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ Tesi: $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$

$$\begin{aligned} \text{Dim. passo induttivo: } S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usato Ip}}}{1 - \frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Uguagliando 1° e ultimo ho la tesi

Ora $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$, quindi la serie converge a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

$\downarrow$
 a_n

Per costruire le somme parziali osservo che $a_n = \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \log \frac{n+2}{n}$
 $= \log(n+2) - \log n$

Quindi $S_1 = a_1 = \log 3 - \log 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = \log 3 - \log 1 + \log 4 - \log 2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \cancel{\log 3} - \log 1 + \log 4 - \log 2 + \log 5 - \cancel{\log 3}$

$S_4 = \dots = \cancel{\log 3} - \log 1 + \cancel{\log 4} - \log 2 + \log 5 - \cancel{\log 3} + \log 6 - \cancel{\log 4}$

L'idea è che sia $S_n = -\log 1 - \log 2 + \log(n+1) + \log(n+2)$

(la formula è stata dedotta dagli esperimenti fino ad $n=4$; ora avrebbe dimostrato per induzione: esercizio!)

Dato per buona la formula abbiamo che $S_n \rightarrow +\infty$, quindi

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) = +\infty$ (la serie diverge a $+\infty$)

$\quad \quad \quad _0 \quad _0 \quad _0$

SERIE GEOMETRICHE Una serie geometrica è una serie del tipo

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro $(= 1 + a + a^2 + a^3 + \dots)$

In questo caso si ha che $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$\uparrow$
Formula dimostrata
a suo tempo per induzione ($a \neq 1$)

Facciamo il limite di S_n per $n \rightarrow +\infty$. Distinguiamo vari casi

Caso $a > 1$ $S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \rightarrow +\infty$, quindi la serie diverge

$\uparrow$
 > 0

Caso $-1 < a < 1$ In questo caso $a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi

$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \rightarrow \frac{-1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}$ dunque la serie converge a questo valore

Caso $a = -1$ È l'esempio banale 3, in cui la serie non converge

Caso $a < -1$ In questo caso a^{n+1} "tende a $+\infty$ per n dispari (che fa diventare $n+1$ pari) e tende a $-\infty$ per n pari".

Detto meglio

$$S_{2m} = \frac{\overbrace{a^{2m+1}}^{-\infty} - 1}{\underbrace{a-1}_{<0}} \rightarrow +\infty$$

$$S_{2m+1} = \frac{\overbrace{a^{2m+2}}^{+\infty} - 1}{\underbrace{a-1}_{<0}} \rightarrow -\infty$$

Quindi S_m non ha limite, dunque la serie è indeterminata.

Caso $a = 1$ La formula per le somme parziali non vale in questo caso, tuttavia $S_m = m+1$ (siamo nell'esempio banale 2), quindi $S_m \rightarrow +\infty$, dunque la serie diverge.

Riassumendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1, 1) \\ \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

— 0 — 0 —

Interpretazione "filosofica" Freccia di Zenone



Somma di tutti i tempi di percorrenza = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \text{geometrica con } a = \frac{1}{2}$$

$$= \text{converge a } \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$