

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 037

Titolo nota

19/10/2012

Esempio 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \log(1+x^2) - \sin x^2 \cdot \log(1+x)}{x \arctan x^3}$$

Taylor con $n=4$

$$\arctan x^3 = x^3 + o(x^3) \quad (\text{sviluppiamo})$$

$$x \arctan x^3 = x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \dots$$

↑ il termine successivo sarebbe x^6

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \leftarrow \text{da tabellina}$$

$$\sin(x^2) \cdot \log(1+x) = (x^2 + o(x^4)) \cdot (x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

Taylor con $n=2$

$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^3)$$

↑ termine succ è con x^4

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \dots$$

$$\sin x \cdot \log(1+x^2) = (x + o(x^2)) \cdot (x^2 + o(x^3)) = x^3 + o(x^4)$$

$$\text{Numeratore: } \cancel{x^3} + o(x^4) - (\cancel{x^3} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)}{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Esempio 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \cosh x^2}{\sinh x^4 - x^4 \cosh x^2}$$

Sviluppo tutto al termine successivo a x^4

$$\sinh(x^4) = x^4 + \frac{1}{6}x^{12} + \underline{o(x^{16})}$$

se serve posso mettere $o(x^{19})$

↓ succ. sarebbe x^{20}

$$\sinh t = t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$$

↑ succ. sarebbe t^5

$$\cos(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^6)$$

↑ se serve anche $o(x^7)$

$$\cos t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$$

Quindi $x^4 \cdot \cos(x^2) = x^4 + \frac{1}{2}x^8 + o(x^{10})$

Denominatore = $\sin(x^4) - x^4 \cos(x^2) = \cancel{x^4} - \cancel{x^4} - \frac{1}{2}x^8 + o(x^{10})$

$$= -\frac{1}{2}x^8 + o(x^8)$$

Sviluppo il numeratore con $n=8$

↑ potrei mettere $o(x^{10})$

o anche $o(x^{12})$, ma

è inutile

$$\cos(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + o(x^8)$$

↑ potrei mettere x^{10}

$$\cos t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$$

↑ $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$$

Quindi $\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + o(x^8)$

Numeratore = $\sqrt{1+x^4} - \cos(x^2) = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^4} - \frac{1}{8}x^8 - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x^4} - \frac{1}{24}x^8 + o(x^8)$

$$= -\frac{1}{6}x^8 + o(x^8)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-\frac{1}{6}x^8 + o(x^8)}{-\frac{1}{2}x^8 + o(x^8)} = \frac{\cancel{x^8} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^8)}{x^8} \right)}{\cancel{x^8} \left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^8)}{x^8} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+x^3) - \sin(x-x^3)}{x \cosh(x+x^2) - \sinh x}$$

Sviluppiamo: $\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

$$\cos R(x+x^2) = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^3)$$

$$\cos R t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3 + x^4) + o(x^3)$$

in quanto $(x+x^2)^3 \sim x^3$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Denominatore} = x \cos R(x+x^2) - \sin R x = \cancel{x} + \frac{1}{2}x^3 + x^4 + o(x^4) - \cancel{x} - \frac{1}{6}x^3$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

↑ tanto c'è già x^3 , quindi inutile tenere termini con x^4

Devo sviluppare $\arctan(x+x^3)$ con $n=3$

$\arctan t \sim t$

$\arctan(x+x^3) \sim x+x^3$ e questo è lo sviluppo con $n=3$

$$\arctan(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3)$$

NO!!!!!!

Scriviamo correttamente con o piccolo

$$\arctan t = t + \underbrace{o(t)}_{\uparrow \text{volendo } o(t^2)}$$

$$\arctan(x+x^3) = x+x^3 + \underbrace{o(x+x^3)}_{o(x)}$$

$$= x+x^3 + o(x) = x+o(x)$$

non è Taylor con $n=3$.

Corretto: punto da

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

pongo $t = x+x^3$ e ho

$$\arctan(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{1}{3}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3)$$

$$= x+x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Analogamente

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^3)$$

$$\begin{aligned}\sin(x-x^3) &= (x-x^3) - \frac{1}{6} (x-x^3)^3 + o((x-x^3)^3) \\ &= x - x^3 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) = x - \frac{7}{6} x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\text{Numeratore} = \arctan(x+x^3) - \sin(x-x^3) =$$

$$= \cancel{x} + \frac{2}{3} x^3 - \cancel{x} + \frac{7}{6} x^3 + o(x^3) = \frac{11}{6} x^3 + o(x^3)$$

In conclusione

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{11}{6} x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3} x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{11}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)} \rightarrow \frac{11}{2}.$$

— 0 — 0 —