

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 036

Titolo nota

19/10/2012

Polinomi di Taylor con centro in $x_0 \neq 0$ Sia $f(x)$ una funzione. Allora sotto opportune ipotesi si ha che esiste un unico polinomio $P_n(R)$, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x_0 + R) = P_n(R) + o(R^n) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Inoltre vale la formula

$$\begin{aligned} P_n(R) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k \end{aligned}$$

Scrittura alternativa: ponendo $x_0 + R = x$ (da cui $R = x - x_0$) si ottiene

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dimo.: Pongo $g(R) = f(x_0 + R)$ e scrivo la formula di Taylor per $g(R)$ con centro in $R=0$, quindi

$$g(R) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} R + \frac{g''(0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} R^n + o(R^n) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Polinomio di Taylor di $g(R)$ centrato in $R=0$

Ora $g(R) = f(x_0 + R)$, $g'(R) = f'(x_0 + R)$, $g''(R) = f''(x_0 + R)$, ... quindi
 $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)$, $g''(0) = f''(x_0)$

quindi le derivate successive di g calcolate in $R=0$ sono uguali alle corrispondenti derivate di f in $x = x_0$, da cui la conclusione
— o — o —

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$ $n=3$ $x_0 = 1$

Devo calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ per $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = -2 [x(1+x^2)^{-2}]' \\ &= -2 \left\{ (1+x^2)^{-2} + x(-2)(1+x^2)^{-3} \cdot 2x \right\} = -2 \left\{ \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3} \right\} \\ &= -2 \frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Sostituisco $x_0 = 1$: $f(x_0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ precorso

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(x_0) = f''(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x_0) = f'''(1) = -2 \cdot \frac{-2}{8} = \frac{1}{2}$$

Quindi $f(x_0+R) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} R^3 + o(R^3)$

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}R^3 + o(R^3)$$

Esempio 2 $f(x) = \cos x$ $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $n=3$ $f(x_0) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f'(x_0) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''(x_0) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad f'''(x_0) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + R\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}R^3 + o(R^3)$$

Scriviamo per esempio 2:

precorso sviluppi da tabellina

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + R\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos R - \sin \frac{\pi}{3} \sin R = \frac{1}{2} \cdot \cos R - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin R =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}R^2 + o(R^3) \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(R - \frac{R^3}{6} + o(R^3) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{12}R^3 + o(R^3)$$

- 0 - 0 -

Esempio 3 $f(x) = \arctan(\sin x)$ $n=3$

Punto da $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ e pongo $t = \sin x$

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= (\sin x) - \frac{1}{3} (\sin x)^3 + \boxed{o((\sin x)^3)} \\ &\quad \downarrow o(x^3) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2} x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Oss. $f(x)$ è dispari, quindi nello sviluppo non può esserci x^4 , quindi è vero pure che

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{1}{2} x^3 + o(x^4)$$

Oss. Quanto vale $f^{(2012)}(0)$?

1° modo: Farla... 2° modo: Taylor. Scrivendo il polinomio di Taylor di grado $n=2012$ (o superiore) il coeff. di x^{2012} sarebbe

$$\frac{f^{(2012)}(0)}{2012!}, \text{ cioè } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(2012)}(0)}{2012!}x^{2012} + \dots$$

Poiché le potenze pari non ci sono (essendo la funzione dispari) il coeff. di x^{2012} deve essere 0, quindi $f^{(2012)}(0) = 0$.

(Occhio: funziona solo perché mi serve il valore per $x_0=0$).

Esempio 4 $f(x) = \arctan(\cos x)$ $x_0=0$ $n=3$

$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\begin{aligned}\arctan(\cos x) &= \cos x - \frac{1}{3} (\cos x)^3 + \boxed{o((\cos x)^3)} \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + \boxed{o(x^3)}\end{aligned}$$

NO

Problema: Lo sviluppo in t , cioè $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ vale per $t \rightarrow 0$. Se io pongo $t = \sin x$ è un cambio lecito in quanto $t \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$. Se invece pongo $t = \cos x$ ho che per $x \rightarrow 0$ si ha che $t \rightarrow 1$.
Se $t - \frac{1}{3}t^3$ è una buona approx di $\arctan t$ quando $t \sim 0$, non lo è quando $t = \cos x \sim 1$.

Achtung! Nelle composizioni occhio a dove tende l'argomento !!!

Rimedio: per calcolare lo sviluppo di $\arctan(\cos x)$ bisogna partire dallo sviluppo di $\arctan x$ in $x_0 = 1$.

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}R^3 + o(R^3) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

$R \rightarrow 0$

$$\arctan(\cos x) = \arctan\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{12}(\dots)^3 + o((\dots)^3)$$

NON SOPRAVVIVE NESSUN TERMINE $o(x^6) = o(x^3)$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

— 0 — 0 —

Allo stesso modo

$$e^{\sin R x}$$

(Posso usare $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots$)

$$e^{\cos R x}$$

(Non posso perché $\cos R x \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, quindi devo usare sviluppo di e^x con $x_0 = 1$)

$$e^{1+R} = e \cdot e^R = e \cdot \left(1 + R + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^3 + \dots\right) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

[Esercizio: calcolare lo sviluppo di $e^{\cos R x}$ con $m=4$]
— 0 — 0 —