

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 035

Titolo nota

19/10/2012

Come trovare i polinomi di Taylor di una data funzione senza calcolare tutte le derivate della funzione

Somma e differenza

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

Quindi: il polinomio di Taylor della somma o differenza di 2 funzioni si ottiene sommando o sottraendo i polinomi di Taylor dei due termini.

Prodotto

$$f(x) \cdot g(x) = (P_m(x) + o(x^n)) \cdot (Q_n(x) + o(x^n))$$

$$= P_m(x) \cdot Q_n(x) + P_m(x) \cdot o(x^n) + Q_n(x) \cdot o(x^n) + o(x^n) \cdot o(x^n)$$

$$\text{Ora } o(x^n) \cdot o(x^n) = o(x^{2n}) = o(x^n)$$

$$P_m(x) \cdot o(x^n) = \boxed{P_m(x)} \cdot \boxed{x^n \cdot w(x)} = w_1(x) \cdot x^n$$
$$= w_1(x)$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 0} w_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{P_m(x)} \cdot \boxed{w(x)} = 0, \text{ quindi } P_m(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$$

$\downarrow$ termine noto $\downarrow$ 0

Analogamente $Q_n(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$. Abbiamo così ottenuto

$$f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$$

Quindi: il polinomio di Taylor del prodotto di 2 funzioni è il prodotto dei polinomi di Taylor dei 2 fattori

Osservazione Nel calcolare il prodotto $P_m(x) \cdot Q_n(x)$ ci si può limitare ai termini di grado $\leq n$, in quanto gli altri sono assorbiti da o piccolo.

Oss. Quanto detto per il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ vale esattamente anche per potenze di $f(x)$, cioè $[f(x)]^k$ con k intero ≥ 2 .

Esempi $f(x) = \sin x$ $g(x) = \cos x$ $n=4$

$$f(x) + 3g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

↑
Tabellina

$$= x - \frac{x^3}{6} + 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$= 3 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

↑ tutti i restanti termini hanno
esponente > 4 , quindi finiscono in $o(x^4)$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 =$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= x^2 - \boxed{\frac{x^4}{3}} + o(x^4)$$

← i restanti termini non ci sono

↑
doppio prodotto $2 \cdot x \cdot \frac{x^3}{6}$

— 0 — 0 —

Composizioni semplici $\sin(2x)$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^4) = 2x - \frac{8}{6}x^3 + o(16x^4)$$

↑
 $t=2x$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

Più in generale: se $f(x) = P_m(x) + o(x^n)$, allora
 $f(ax) = P_m(ax) + o(x^n)$

$$\sin(x^2) = \underset{\substack{\uparrow \\ t=x^2}}{x^2} - \frac{(x^2)^3}{6} + o((x^2)^4) = \boxed{x^2 - \frac{x^6}{6}} + o(x^8)$$

$\uparrow$
 è il polinomio $P_8(x)$ di $\sin^2 x$

$\uparrow$
 guadagno di potenza su o piccolo

Più in generale: se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, allora
 $f(x^k) = P_n(x^k) + o(x^{kn})$

Dim.: $f(x) = P_n(x) + w(x) \cdot x^n$

Metto x^k al posto di x e ottengo

$$f(x^k) = P_n(x^k) + \underbrace{w(x^k)}_{\substack{\text{"} \\ w_1(x) \rightarrow 0}} x^{kn} = P_n(x^k) + o(x^{kn})$$

Esempio 1 e^{x^3} $n=10$ 1° modo: fare 10 derivate...

2° modo: parto da $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \boxed{o(t^3)}$ e pongo $t = x^3$

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + \boxed{o(x^9)}$$

Esempio 2 $\cos(x^5)$ Parto da $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^5)$

Pongo $t = x^5$: $\cos(x^5) = 1 - \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{24}x^{20} + o(x^{25})$

In realtà posso mettere $= 1 - \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{24}x^{20} + o(x^{29})$

Infatti, se andarsi avanti con lo sviluppo, il termine successivo sarebbe $-\frac{1}{6!}x^{30}$, proveniente da $-\frac{1}{6!}t^6$ nello sviluppo di $\cos t$. Quindi posso dire che sto trascurando solo le potenze dal 30 in poi, quindi $o(x^{29})$

— o — o —

Analogamente: $e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + o(x^{11})$

Composizioni vere $f(x) = e^{\sin x}$ sviluppo con $n=3$

Parto da $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ e pongo $t = \sin x$. Ottengo
 $\omega(t) \cdot t^3$

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)$$

Sostituisco lo sviluppo di $\sin x$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}(\dots)^3 + o((\sin x)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3) + \frac{1}{2}(x^2) + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \boxed{o((\sin x)^3)}$$

gli altri termini sono finiti in $o(x^3)$ ci piacerebbe che fosse $o(x^3)$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Dimostrazione che $o((\sin x)^3) = o(x^3)$

Il termine $o((\sin x)^3)$ sarebbe un $(\sin x)^3 \cdot \omega(\sin x) =$

$$= x^3 \frac{(\sin x)^3}{x^3} \cdot \omega(\sin x)$$

$\omega_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(\sin x)^3}{x^3}}_1 \cdot \underbrace{\omega(\sin x)}_0 = 0.$$