

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 034

Titolo nota

18/10/2012

Formula generale per i polinomi di Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Per calcolare i polinomi di Taylor di $f(x)$ bisogna calcolare tutte le derivate di $f(x)$ nel punto $x_0=0$.

$f(x) = e^x$ $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Quindi il coeff. di x^k nel polinomio di Taylor è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$f(x) = \cos x$ $f'(x) = \sin x$ $f''(x) = \cos x$ $f'''(x) = \sin x$

Quindi

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & k \text{ dispari} \\ \cos x & k \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ 1 & k \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi il coeff. di x^k nel polinomio di Taylor è 0 se k è dispari (quindi le potenze dispari "non ci sono") ed è $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ se k è pari

In sostanza viene come lo sviluppo di e^x solo con i termini di grado pari

$f(x) = \sin x$ Stessa cosa scambiando pari e dispari.

Osservazione Sommando gli sviluppi di $\cos x$ e $\sin x$ si ottiene quello di e^x , ed infatti

$$\cos x + \sin x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

$f(x) = \cos x$ Calcoliamo le derivate successive

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \cos x & f^{(1)}(x) &= -\sin x & f^{(2)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(x) &= -\sin x & \dots & \end{aligned}$$

e così via, cioè le derivate si ripetono con periodo 4 (ad es. $f^{(2012)}(x) = \cos x$)

Sostituendo $x=0$ trovo 1, 0, -1, 0, e così via, cioè

→ trovo 0 per k dispari

→ trovo ± 1 alternati per k pari.

Quindi il coeff. di x^k nel polinomio, che è $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, risulta

→ 0 per k dispari

→ $\pm \frac{1}{k!}$ alternati per k pari

$f(x) = \sin x$ Analogo, solo scambiando pari con dispari

$f(x) = \log(1+x)$ Occorre capire le derivate successive

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \frac{1}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \frac{1}{(1+x)^5}$$

L'idea è che sia

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Formula dedotta dagli esperimenti fino a $k=5$

Dim. per induzione

Passo base $k=1$

$$f'(x) = (-1)^2 \frac{0!}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} \quad \text{ok}$$

Passo induttivo Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$$\text{Tesi: } f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2} \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Dim. passo induttivo

$$f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = \left[(-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right]' = (-1)^{k+1} (k-1)! \left[\frac{1}{(1+x)^k} \right]'$$

↑
uso ipotesi

$$= (-1)^{k+1} (k-1)! \cdot (-k) (1+x)^{-k-1} = (-1)^{k+2} k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo termine ho proprio la tesi.

Dalla formula per la derivata ottengo che $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$, quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} \cancel{(k-1)!}}{k \cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

quindi segni alterni e k (senza fattoriale) al denominatore.

Osservazione Gli sviluppi sono gli sviluppi di Taylor con $n=1$.

Esercizio (non banalissimo) Giustificare lo sviluppo di Taylor di $(1+x)^k$ trovando la formula per la sua derivata k -esima

Idea: trovare gli sviluppi di Taylor di funzioni qualunque by-passando il calcolo delle derivate successive

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$

Questo non si può fare con i limiti notevoli perché tira in ballo termini successivi dello sviluppo.

Oss. → Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se usa solo il 1° termine dello sviluppo

→ Se un limite tira in ballo il 7° termine di Taylor, vuol dire che richiederebbe 7 colpi di Hôpital (nell'esempio ci vogliono 3 colpi di Hôpital).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3 + \log(1 + \arctan^7(\sin x))}$$

è come prima in quanto
 $\log(1 + \arctan^7(\sin x)) = O(x^3)$
 (è $\sim x^7$)

$$[\log(1 + \arctan^7(\sin x)) \sim \log(1 + \arctan^7 x) \\ \sim \log(1 + x^7) \sim x^7 \text{ quindi } O(x^3)]$$

quindi

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3 + \log(\dots)} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^3)) + x^5}{x^3 + O(x^3)} =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^3)}{x^3 + O(x^3)} = \frac{x^3 (\frac{1}{6} + \frac{O(x^3)}{x^3})}{x^3 (1 + \frac{O(x^3)}{x^3})} \rightarrow \frac{1}{6}$$

Come scegliere a che valore di n fermarsi? Esperienza...

Cosa succede se mi fermo troppo presto:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \stackrel{n=2}{=} \frac{x - (x + O(x^2)) + x^5}{x^3} = \frac{x^5 + O(x^2)}{x^3} = \frac{O(x^2)}{O(x^2)} = \text{BOH}$$

$$= \frac{O(x^2)}{x^3} = \frac{O(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \stackrel{\downarrow \neq 0}{\rightarrow} \text{BOH}$$

Se mi fermo troppo tardi:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \stackrel{n=5}{=} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^5)) + x^5}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + x^5 + O(x^5)}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 (\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + x^2 + \frac{O(x^5)}{x^3 x^2})}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}$$

Viene corretto, ma ho fatto tanti conti per nulla.