

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 033

Titolo nota

18/10/2012

Formula di TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione e sia $n \in \mathbb{N}$.

di grado $\leq n$

Sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

Operativamente Posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$. Questa operazione è utile quando si calcola un limite per $x \rightarrow 0$.

Oss. Le ipotesi sono che $f(x)$ sia definita almeno in un intervallo che contiene $x_0 = 0$ e che sia derivabile almeno n volte, più precisamente

→ derivabile almeno $(n-1)$ volte in tutto l'intervallo

→ derivabile n volte nel pto $x_0 = 0$.

Notazione La formula $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ si dice formula di Taylor con **resto di PEANO**, cioè il resto è scritto sotto forma di o piccolo.

$$f(x) - P_n(x) = o(x^n)$$

"resto": errore che commetto se al posto di $f(x)$ scrivo $P_n(x)$

"Dimi" Lo strumento fondamentale è il seguente Lemma.

Lemma Sia $\varphi(x)$ una funzione tale che
 $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$,
cioè una funzione che si annulla in $x_0 = 0$ insieme a tutte le
sue derivate fino all'ordine n .
Allora $\varphi(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$

Dim nel caso $n=3$ Uso la definizione quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^3} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ [0: \text{H\ddot{o}p}]}{}}{\quad} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{3x^2} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ [0: \text{H\ddot{o}p}]}{}}{\quad} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x)}{6x} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ [0: \text{H\ddot{o}p}]}{}}{\quad} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'''(x)}{6} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \varphi'''(0)=0}}{=} 0$$

— 0 — 0 —

Back to dim. Taylor (sempre caso particolare $n=3$)

Devo dimostrare che $f(x) = P_3(x) + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, cioè che
 $f(x) - P_3(x) = o(x^3)$. Pongo $\varphi(x) = f(x) - P_3(x)$ e punto ad usare
il Lemma, cioè a verificare che $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$.

Ma

$$\varphi(x) = f(x) - P_3(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0; \quad \varphi'(x) = f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2$$

$$\varphi'(0) = f'(0) - f'(0) = 0; \quad \varphi''(x) = f''(x) - f''(0) - f'''(0)x$$

$$\varphi''(0) = f''(0) - f''(0) = 0; \quad \varphi'''(x) = f'''(x) - f'''(0) \Rightarrow \varphi'''(0) = 0.$$

Idea per il caso generale: quando pongo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$ e
vado a derivare k volte, ottengo

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) + \text{termini con almeno } x, x^2, x^3, \dots$$

quindi quando sostituisco $x=0$ viene $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - f^{(k)}(0) = 0$. $\square$

TABELLINA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR

Se voglio il $P_n(x)$ basta che mi fermi a x^n .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = \underbrace{x}_{\text{cometto dopo video}} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sinh x = \underbrace{x}_{\text{cometto dopo video}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\binom{\alpha}{1}$ $\binom{\alpha}{2}$ $\binom{\alpha}{3}$ $\binom{\alpha}{4}$

Oss. Se α fosse intero positivo sarebbe il binomio di Newton. Tuttavia lo sviluppo vale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Caso particolare $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots$$

basta sostituire $\alpha = -1$ in $\binom{\alpha}{k}$

Esempi di polinomi di Taylor

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^3) \quad P_3(x)$$

Taylor con $n=3$

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^4) \quad P_4(x)$$

Taylor con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

NO! Avevi dovuto mettere $+\frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2) \\ = x + o(x^2)$$

CORRETTA MA POCO FORBA

(Taylor con $n=2$)

$$\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^2)$$

Conetta perché $o(x^2)$ si mangia il termine cubico.

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$

Uso Taylor con $n=3$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x^5}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \boxed{x^5}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}}{1} = \frac{1}{6}$$

↓
0

— 0 — 0 —