

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 032

Titolo nota

17/10/2012

FUNZIONI IPERBOLICHE $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà di simmetria $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \Rightarrow$ DISPARI

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \Rightarrow$$
 PARI

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x \Rightarrow$$
 DISPARI

Derivate $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Esercizio: calcolare $(\tanh x)'$ e vedere analogie con $(\tan x)'$

Relazione fondamentale $(\sinh x)^2 = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4}$

$$(\cosh x)^2 = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formule di duplicazione $\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$$2 \sinh x \cdot \cosh x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

$$(A-B) \cdot (A+B) = A^2 - B^2$$

Esercizio Trovare formule analoghe per $\cosh(2x)$

Esercizio Trovare formule per $\sinh(x+y)$ e per $\cosh(x+y)$ e vedere analogie con la trigonometria.

Limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^x - 1}{2x}} - \boxed{\frac{e^{-x} - 1}{2x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\downarrow \frac{1}{2}$
 $\downarrow -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = \left[\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{H\~{o}p}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sinh x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

["Esercizio": ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$ usando De L'H\~{o}pital?]

Sviluppini I due limiti di sopra sono equivalenti a dire che

$$\sinh x = x + o(x)$$

$$\cosh x = 1 + o(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad [\text{Verificare!}]$$

$$\text{---} 0 \text{---} \text{---} 0 \text{---}$$

Limiti a $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{e^x} - \boxed{e^{-x}}}{2} = +\infty$$

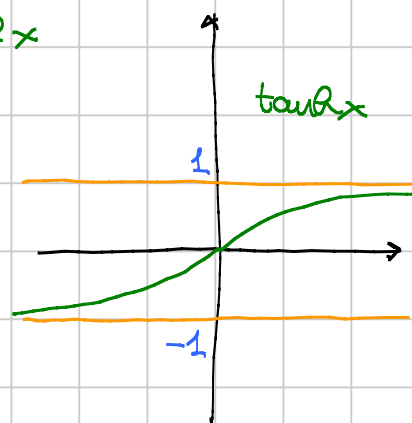
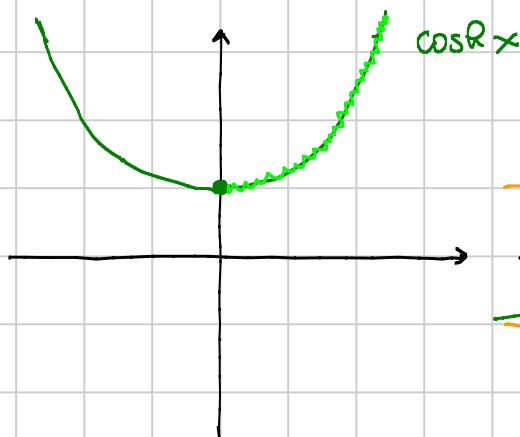
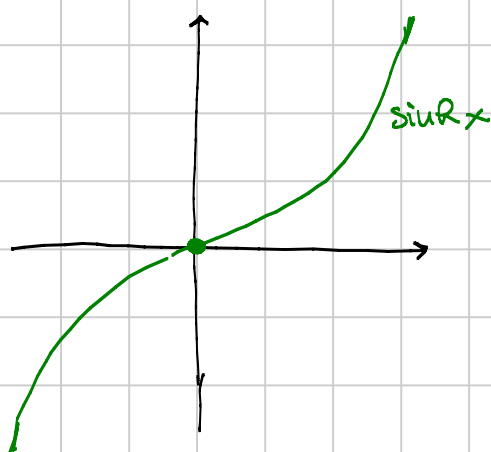
$\uparrow +\infty$
 $\uparrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = \dots = -\infty \quad (\text{funzione dispari!})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

$\uparrow$ pari

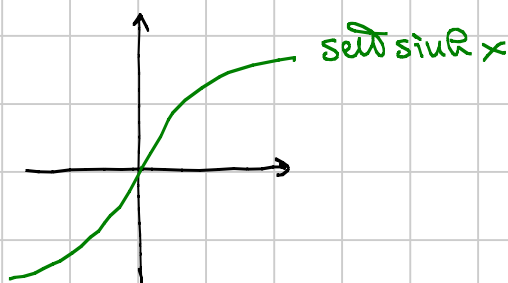
Grafici



Esercizio Verificare (stile precorso) che $\sinh x$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$ e $\cosh x$ è strett. cresc. per $x \geq 0$.

Funzioni inverse, $f(x) = \sinh x$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva. Quindi ammette una funzione inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che è
$$g(x) = \operatorname{Sinh} \sinh x$$

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva. Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile. La sua inversa $g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è
$$g(x) = \operatorname{Sinh} \cosh x$$



Formula per $\operatorname{sinh} x$. Cosa vuol dire trovare $\operatorname{sinh} x = \alpha$? Vuol dire risolvere $\sinh x = \alpha$, cioè $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \alpha$, cioè

$$e^x - e^{-x} = 2\alpha. \text{ Pongo } e^x = y \text{ e diventa } y - \frac{1}{y} = 2\alpha, \text{ cioè}$$

$$y^2 - 1 = 2\alpha y, \text{ cioè } y^2 - 2\alpha y - 1 = 0, \text{ cioè } y = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}.$$

Tornando in x mi trovo a risolvere $e^x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}$.

Apparentemente ci sono 2 possibilità, ma quella con il segno - produce $e^x =$ roba negativa, il che è impossibile. Dunque resta $e^x = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ da cui $x = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})$

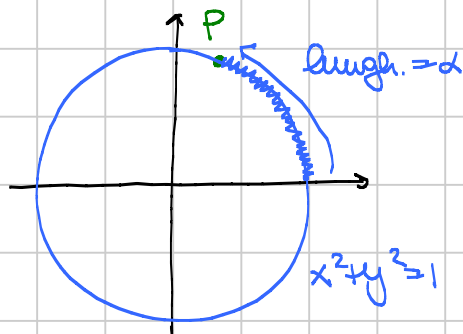
Quindi

$$\operatorname{Sinh} \sinh \alpha = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})$$

Nota bene: l'argomento del log è > 0 anche per $\alpha < 0$. Verificarlo !!!

Esercizio Fare gli stessi conti per trovare $\operatorname{Sinh} \cosh \alpha$ e $\operatorname{Sinh} \tanh \alpha$ (occhio ai segni !!)

Interpretazione geometrica

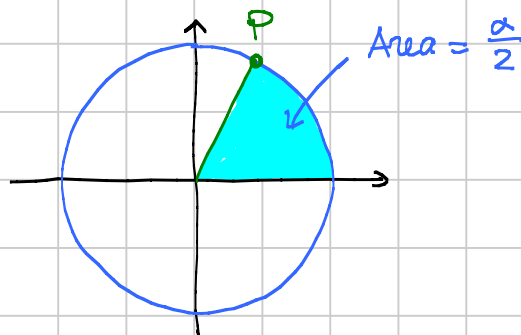


$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Trigonometria normale REVISITED

Dato α , cerco un p.to P in maniera tale che $\text{Area}(\text{settore}) = \frac{\alpha}{2}$,

Allora $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$



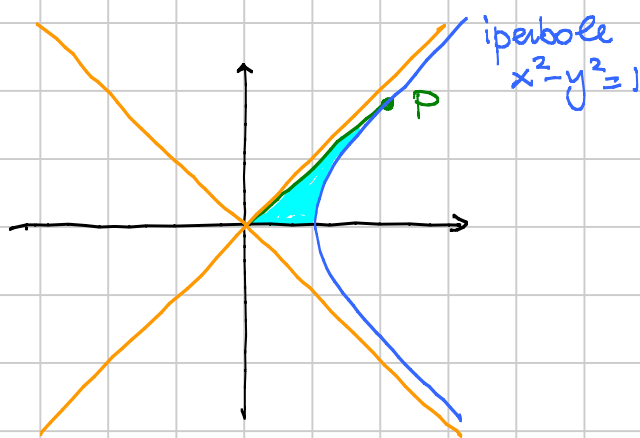
Trigonometria iperbolica

Dato α , cerco un p.to P sull'iperbole in maniera tale che

$$\text{Area}(\text{settore}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Ebbene: $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$

Il fatto che P stia sull'iperbole dice che $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$



Osservazione fisica

Un filo tra 2 pali si
dispone come un $\cosh x$.

