

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 031

Titolo nota

17/10/2012

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Derivate successive: Data $f(x)$, sotto opportune ipotesi possiamo calcolare $f'(x)$, cioè la funzione che ad ogni x associa il valore della derivata di f in x .
Le derivate successive si ottengono continuando a derivare: $f''(x) = (f'(x))'$.

Notazione:

$$f''(x) \\ \vdots$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \\ \frac{d^k f}{dx^k}(x)$$

$$f^{(2)}(x) \\ f^{(k)}(x)$$

$$\ddot{f}(x) \\ \vdots$$

Definite per bene: $f'(x) = \text{derivata di } f(x)$, $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$

Teorema di De L'Hôpital. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.
Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Supponiamo che:

(i) un po' di burocrazia

tutto ciò che serve per dar senso all'enunciato:
poter dividere per $g(x), g'(x), \dots$

(ii) il limite sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (stesso l).

Achtung! De L'Hôpital non può servire

(1) se la forma indeterminata non è del tipo previsto (in questo caso però funzionano i teo. algebrici)

(2) se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste (in questo caso BOH, non si può concludere nulla)

Utilizzo operativo Devo fare il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

• Controllo che sia $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

• Se sì, provo a calcolare il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

→ se questo non esiste, sono guai

→ se questo esiste ed è $l \in \mathbb{R}$, allora anche quello iniziale è l

→ se questo è a sua volta una forma indeterminata, allora posso andare avanti calcolando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e così via ricorsivamente.

— 0 — 0 —

Achtung! L'utilità pratica di Hôpital è limitata dal fatto che le funzioni, derivandole (specie più volte) tendono a "peggiorare"

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$

$\uparrow$ Hôp $\uparrow$ limite notevole

NO!! Non è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$!!!

In questo caso il limite è $\frac{1}{0^+} = +\infty$ per teo. algebrico.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3\sin x}{x}$

Si vede che Denominatore $\rightarrow +\infty$ e Numeratore $\geq 4x - 3 \rightarrow +\infty$.

Posso applicare Hôpital

$\uparrow$ Hôp

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3\sin x}{x} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 3\cos x}{1} = 4 + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x = \text{N.E.}$$

Quindi il limite iniziale non esiste.

NO!!! Visto che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, NON POSSIAMO concludere nulla sul limite iniziale, con questo sistema

In realtà $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + 3 \frac{\sin x}{x} = 4$

— 0 — 0 —

$\downarrow$ (Carabinieri)
0

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $[= +\infty \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = +\infty \cdot 0]$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\uparrow$
[0/0: Hôpital]

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ (raccolgo x^2 sopra e sotto)

— 0 — 0 —

Osservazione 1 Si può utilizzare Hôpital per fare limiti di successioni, ma solo mediante l'applicazione del criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$

$\uparrow$ Pongo $x=n$ $\uparrow$ Hôpital

Osservazione 2 Il limite di sopra si poteva fare utilizzando la formula

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$ da cui $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$,
quindi

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1$

$\uparrow$
 $y = \frac{1}{x}$

Da dove arriva la formula?

$\arctan x = \alpha$, quindi $x = \tan \alpha$,
quindi $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$

$\uparrow$
archi associati: percorso

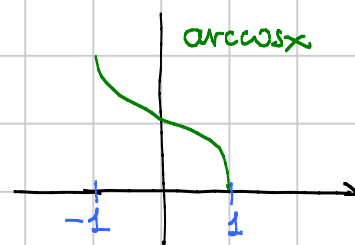
quindi $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$

$\downarrow$

$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ $\left[\frac{0}{0} \right]$



$\stackrel{\uparrow}{\text{H\ddot{o}p}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-x}}} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Conseguenza: ponendo $1-x=y$ ottengo che $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-y)}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}$,

il che a sua volta è equivalente a dire che $\arccos(1-y) = \sqrt{2}\sqrt{y} + o(\sqrt{y})$
(fare la verifica), il che dice che $\arccos(1-y)$ si comporta come $\sqrt{2y}$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^3}{x^3}$

1° modo Ricorso + limiti notevoli

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) + x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

NO!!! LIMITE METÀ PER VOLTA!!! QUI

2° modo Uso dell'equivalenza asintotica $\sin x \sim x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^3}{x^3} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

NO!!! L'EQUIVALENZA ASINTOTICA È PERICOLOSA! METTERE O PICCOLO

3° modo Hôpital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^3}{x^3} \stackrel{\uparrow}{\left[\frac{0}{0}, \text{H\ddot{o}p} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 3x^2}{3x^2} \stackrel{\uparrow}{\left[\frac{0}{0}, \text{H\ddot{o}p} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 6x}{6x} \stackrel{\uparrow}{\left[\frac{0}{0}, \text{H\ddot{o}p} \right]} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 6}{6} = \frac{1}{6}$ Uhm....