

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 030

Titolo nota

13/10/2012

Derivata di $\frac{1}{f}$ Pongo $Q(x) = \frac{1}{f(x)}$

$$Q'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x_0+h) - Q(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}$$

$\downarrow$ $f'(x_0)$ $\downarrow$ $[f(x_0)]^2$

$$= - \frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Derivata di $\frac{f}{g}$ $\left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right]' =$ uso regola prodotto

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{f'}{g} + f \left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Esempio $[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cos x - \sin x \cdot [\cos x]'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

[Esercizio: Dimostrare che $[x^k]' = k x^{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ usando l'induzione e la derivata del prodotto $[x^{k+1}]' = [x \cdot x^k]'$]

Derivata della composizione Pongo $C(x) = f(g(x))$

Per ipotesi:

$$g \text{ è derivabile in } x_0: g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$f \text{ è derivabile in } g(x_0): f(g(x_0)+k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot k + o(k)$$

$$\begin{aligned}
C(x_0 + R) &= f(g(x_0 + R)) \\
&= f(g(x_0) + \underbrace{g'(x_0) \cdot R + o(R)}_k) \\
&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) g'(x_0) \cdot R + \underbrace{f'(g(x_0)) \cdot o(R)}_{\substack{\uparrow \\ o(R)}} + \\
&\quad + \underbrace{o(g'(x_0)R + o(R))}_{\substack{\searrow \\ o(g'(x_0)R) + o(o(R)) = o(R)}} \\
&= \underbrace{f(g(x_0))}_{C(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot R}_{\alpha \cdot R} + \underbrace{o(R)}_{o(R)}
\end{aligned}$$

DERIVATA FUNZIONE INVERSA

Sia $f(x)$ una funzione, e sia $g(x)$ la funzione inversa

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= x & \forall x \in \text{insieme di partenza di } f \\
f(g(x)) &= x & \forall x \in \text{ " " " " } g
\end{aligned}$$

Prendo la 2ª relazione e derivo a dx e dx

$$[f(g(x))]' = [x]' \quad f'(g(x)) g'(x) = 1 \quad \text{da cui}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Formula per derivata della funzione inversa

Achtung! Ho ricavato la formula supponendo di sapere già che $g(x)$ è derivabile. Questo andrebbe dimostrato.

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$ $f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$ $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2 g(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 (\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $g(x) = \arcsin x$ $f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}}$$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

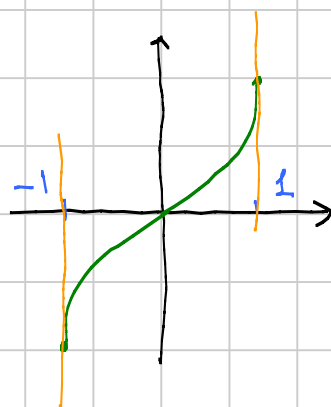
Achtung! Ci sono almeno 2 dati oscuri

- ① ho usato che $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Questo è vero solo nel 1° e 4° quadrante. Ho usato la formula con $\alpha = g(x) = \arcsin x$ e $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, quindi proprio nel 1° e 4° quadrante
- ② ho usato che $\sin(\arcsin x) = x$. Questo vale per ogni $x \in$ insieme di partenza di $\arcsin x$, cioè per ogni $x \in [-1, 1]$ che è proprio dove voglio derivare.

Achtung! Il denominatore si annulla per $x = \pm 1$

Geometricamente corrisponde al fatto

che il grafico ha tangente verticale in $x = \pm 1$.



[Esercizio: fare lo stesso, compreso il chiarimento dei dati oscuri, con $f(x) = \cos x$]

Derivata di $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$

$$[f(x)]' = [x^\alpha] = [e^{\alpha \log x}]'$$

$g(f(x))$ con $g(x) = e^x$
 $f(x) = \alpha \log x$

$$= [e^{\alpha \log x}] \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Esempio 1

$$f(x) = \cos(e^x) \quad \text{Composizione}$$

$$f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$$

$$f(x) = e^x \cdot \cos x \quad \text{Prodotto}$$

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x (-\sin x)$$

$$f(x) = \arctan x^3 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^6} \cdot 3x^2$$

$$f(x) = x^2 \cdot \log(\sin x)$$

$$f'(x) = [x^2]' \cdot \log(\sin x) + x^2 \cdot [\log(\sin x)]'$$

$$= 2x \cdot \log(\sin x) + x^2 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

Esempio 2 $f(x) = (\arctan x)^{\sin x}$

Evitare cose creative: $\sin x \cdot (\arctan x)^{\sin x - 1}$
 $(\arctan x)^{\sin x} \cdot \log(\arctan x)$

$$f'(x) = \left[e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)} \right]'$$

$$= e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)} \cdot \left\{ \cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

$(\arctan x)^{\sin x}$

$$= (\arctan x)^{\sin x} \cdot \log(\arctan x) \cdot \cos x + (\arctan x)^{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x}{1+x^2}$$

— o — o —