

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 029

Titolo nota

13/10/2012

Regole di derivazione e derivate delle funzioni elementari

$$(\text{costante})' = 0$$

$$(x^k)' = k x^{k-1} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f' \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempio 1 Calcolare la derivata di $f(x) = x^3$

$$\boxed{1^\circ \text{ modo}} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + \cancel{h^3} - \cancel{x_0^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + \underbrace{3x_0 h}_{\downarrow 0} + \underbrace{h^2}_{\downarrow 0}) = 3x_0^2$$

$$\boxed{2^\circ \text{ modo}} \quad f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = \underbrace{x_0^3}_{f(x_0)} + \underbrace{3x_0^2 h}_{f'(x_0) \cdot h} + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{o(h)}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$

1° modo $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\downarrow 1} = e^{x_0}$$

2° modo $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = e^{x_0} (1+h+o(h))$

$\uparrow$
sviluppo di e^h

$$= \underbrace{e^{x_0}}_{f(x_0)} + \underbrace{e^{x_0} \cdot h}_{\alpha h} + o(h)$$

Esempio 3 $f(x) = \log x$ $x_0 > 0$

1° modo $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$

precorso

$$\downarrow = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\underbrace{\frac{h}{x_0}}_{\downarrow y = \frac{h}{x_0}} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}$$

2° modo $f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right] =$

$$= \log x_0 + \log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \quad (\text{Usa } \log(1+t) = t + o(t))$$
$$= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{h}{x_0}}_{\alpha h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

quindi $\alpha = \frac{1}{x_0}$

Esempio 4 $f(x) = \cos x$

1° modo $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x_0 \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h^2}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{h}_0 - \sin x_0 \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_1 \right) = -\sin x_0$$

[Esercizio: fare lo stesso conto utilizzando la formula per $\cos \alpha - \cos \beta$]

2° modo $f(x_0+h) = \cos(x_0+h) = \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h$
 [Uso $\cos h = 1 + o(h)$, $\sin h = h + o(h)$]

$$\begin{aligned} &= \cos x_0 (1 + o(h)) - \sin x_0 (h + o(h)) \\ &= \cos x_0 + \cos x_0 \cdot o(h) - \sin x_0 \cdot h - \sin x_0 \cdot o(h) \\ &= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{-\sin x_0 \cdot h}_{\alpha \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)} \end{aligned}$$

$$\alpha = -\sin x_0$$

[Esercizio: ripetere la stessa dimostrazione /i con $f(x) = \sin x$]

Osservazione Derivate funzioni elementari = limiti notevoli
 = sviluppi

Derivata della somma Sia dato $f(x)$ e $g(x)$. Pongo $S(x) = f(x) + g(x)$.
 Calcolo la derivata di $S(x)$

1° modo $S'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2° modo Per ipotesi $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$
 $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$

Le sommo:

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{S(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{S(x_0)} + \underbrace{(f'(x_0) + g'(x_0))h}_{\alpha \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

[Esercizio: fare lo stesso per la differenza]

Derivata del prodotto Pongo $P(x) = f(x) \cdot g(x)$

1° modo $P'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0+h) - P(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\substack{\text{f è} \\ \text{continua} \\ \downarrow \\ f(x_0)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{\downarrow g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} \right]$$
$$= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

2° modo $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$
 $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$

Moltiplico

$$\underbrace{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h)}_{P(x_0+h)} = f(x_0) \cdot g(x_0) \quad P(x_0)$$
$$+ [f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)] h \quad o(h)$$
$$+ 6 \text{ termini due sono } o(h) \quad o(h)$$

$$f(x_0) \cdot o(h) = o(h)$$

$$f'(x_0) \cdot h \cdot o(h) = o(h^2) = o(h)$$

$$o(h) \cdot o(h) = o(h^2) = o(h)$$

$\downarrow$
se batte h^2 , allora batte h (ma non viceversa).

$$h \cdot h = h^2 = o(h)$$