

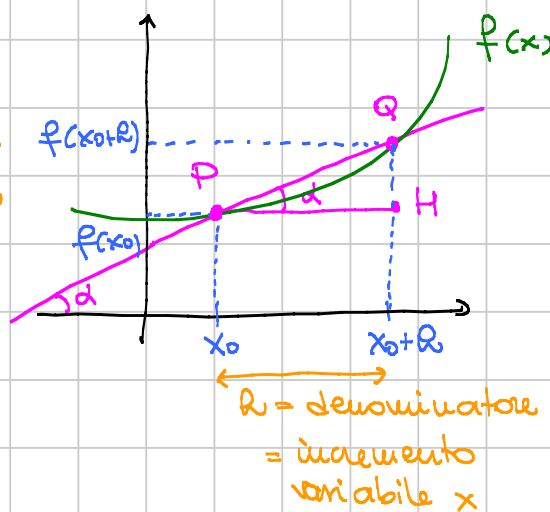
RAPPORTO INCREMENTALE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

Si definisce rapporto incrementale la quantità

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\text{com. increm. variabile } y}{\text{incremento variabile } x}$$

numeratore =
incremento
variabile y



Significato geometrico

$$\text{Rapporto incrementale} = \frac{QH}{PH} = \tan \widehat{QPH} = \text{coeff. angolare retta PQ}$$

$\uparrow$ Def. $\uparrow$ trigo. triang. rettangoli $\uparrow$ significato geom. coeff. angolare d'una retta

Def. Si dice che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 se esiste il $\lim_{h \rightarrow 0}$ il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \text{del rapporto incrementale.}$$

Tale limite si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$f^{(1)}(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

Significato geometrico Quando $h \rightarrow 0$ abbiamo che

- il punto Q tende al punto P
- la retta secante PQ tende alla retta tangente al grafico in P

Quindi

- il rapporto incrementale, cioè il coeff. ang. della retta PQ, tende al coeff. angolare della retta tangente in P

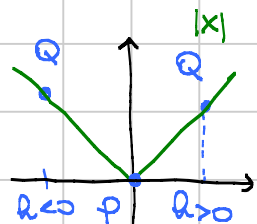
$$f'(x_0) = \text{coeff. ang. retta tangente al grafico in P}$$

Equazione della tangente al grafico Si tratta di fare la retta che passa per $P = (x_0, f(x_0))$ e con coeff. angolare $f'(x_0)$. Quindi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Oss. $f'(x_0)$ non è obbligato ad esistere. Cito 2 esempi:

① $f(x) = |x|$ con $x_0 = 0$. Dovei fare



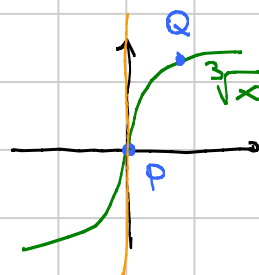
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\text{Non esiste perché } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$



Geometricamente corrisponde al fatto che la retta tangente è verticale

Def. Si dice che $f(x)$ è differeenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \quad (\text{Diff.})$$

Teorema La funzione $f(x)$ è differenziabile in x_0 se e solo se $f(x)$ è derivabile in x_0 .

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$ è l'unico numero per cui vale la formula della definizione.

Dim. Supponiamo che $f(x)$ verifichi (Diff.). Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha + \frac{o(h)}{h} = \alpha$$

Quindi f è derivabile e $f'(x_0) = \alpha$

Viceversa, supponiamo che f sia derivabile e verifichiamo che $f(x)$ soddisfa (Diff) con $\alpha = f'(x_0)$. Devo dimostrare che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + o(R) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

cioè

$$f(x_0 + R) - f(x_0) - f'(x_0)R = o(R)$$

Uso definizione quasi equiv. di o piccolo e mi riduco a

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0) - f'(x_0)R}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R} - f'(x_0) \right] = 0$$

— 0 — 0 —

$\hookrightarrow f'(x_0)$

Conseguenza: ci sono due modi alternativi di definire $f'(x_0)$:

- ① il limite del rapporto incrementale
- ② l'unico numero $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui vale (Diff) cioè

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha R + o(R)$$

— 0 — 0 —

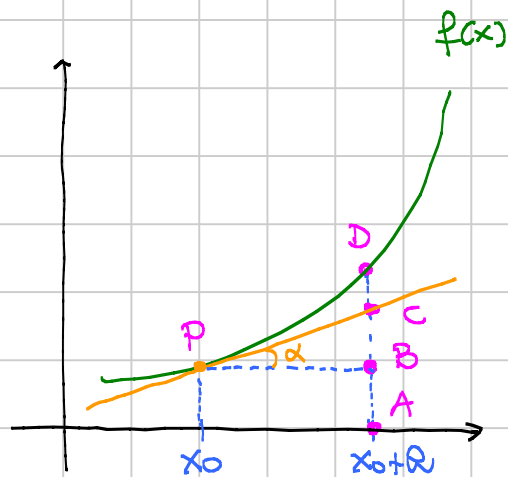
$$AD = AB + BC + CD$$

$$AD = f(x_0 + R)$$

$$AB = f(x_0)$$

$$\frac{BC}{PB} = \tan \alpha = f'(x_0)$$

$$\text{Quindi } BC = PB \cdot f'(x_0) = f'(x_0) \cdot R$$



$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot R + \boxed{o(R)} \quad \text{Quando } R \rightarrow 0$$

$\underbrace{\quad}_{AD} \quad \underbrace{\quad}_{AB} \quad \underbrace{\quad}_{BC} \quad \underbrace{\quad}_{CD}$

- il termine AB resta uguale a se stesso, cioè NON DIPENDE DA R
- il termine BC tende a 0 in maniera proporzionale ad R (se dimezzo R , si dimezza anche BC) con costante di proporzionalità uguale a $\tan \alpha$, cioè $f'(x_0)$ (dipende LINEARMENTE da R)

- Il termine $o(R)$ tende a zero più velocemente di R , e per questo è $o(R)$.

— 0 — 0 —

Teorema Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , allora $f(x)$ è continua in x_0 .

Dim. Devo dim. che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Trasporto il limite a zero

ponendo $R = x - x_0$. Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $R \rightarrow 0$. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{R \rightarrow 0} f(x_0 + R) = \lim_{R \rightarrow 0} f(x_0) + \boxed{f'(x_0)R} + \boxed{\frac{o(R)}{R}} \cdot \boxed{R} \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

In alternativa (all'autica)

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \frac{\boxed{f(x_0 + R) - f(x_0)}}{\boxed{R}} \cdot \boxed{R} + f(x_0) = f(x_0) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad f'(x_0) \quad 0 \end{aligned}$$