

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 027

Titolo nota

12/10/2012

EQUIVALENZA ASINTOTICA siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$

Def. Si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1 \quad \leftarrow \text{differenza rispetto ad 0 piccolo}$$

Def. quasi equivalente. Se posso dividere per $g(x)$... allora $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Brutalmente: $f(x)$ e $g(x)$ hanno la stessa forza per $x \rightarrow x_0$, cioè "paneggiano".

Proprietà Si deducono facilmente dalla definizione. Ad esempio

supponiamo che $f_1(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

$$f_2(x) \sim f_1(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Allora $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Dim. Per ipotesi $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = f_1(x) \cdot w_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_2(x) = 1$$

$$\text{Ma allora } f_2(x) = f_1(x) \cdot w_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{w_1(x)}_0 \underbrace{w_2(x)}_1 = 0, \text{ quindi } f_2(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

"Sviluppini" in termini di equivalenza asintotica:

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad \arcsin x \sim x$$

$$e^x \sim 1+x \quad \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \log(1+x) \sim x$$

Achtung! L'utilizzo dell'equivalenza asintotica nel calcolo dei limiti è MOLTO PERICOLOSA ed estremamente comoda

Esempio 1 $e^{\sin x}$

Brutale: $e^{\sin x} \sim e^x \sim 1+x$

$\uparrow$ sviluppo $\uparrow$ sviluppo
 $\sin x$ e^x

Giustificazione e o piccolo conetto. Partiamo da $e^t = 1+t+o(t)$

Pongo $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + o(\sin x) \\ &= 1 + x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= 1 + x + o(x) + o(x) + o(o(x)) \\ &= 1 + x + o(x) + o(x) + o(x) \\ &= 1 + x + o(x) \end{aligned}$$

(sviluppo $\sin x = x + o(x)$)

$(o(g_1 + g_2) = o(g_1) + o(g_2))$

(uso $o(o(g)) = o(g)$)

Esempio 2 $x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5)$

Dim. $x^2 \cdot o(x^3) = x^2 \cdot x^3 \cdot \underbrace{w(x)}_{\rightarrow 0} = x^5 \cdot \underbrace{w(x)}_{\rightarrow 0}$

Esempio 3 $\sin^2 x = (\sin x)^2 = (x + o(x))^2$

$$\begin{aligned} &= x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x) \cdot o(x) \\ &= x^2 + o(x^2) + o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Si poteva anche verificare con la def. quasi equivalente, cioè facendo $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$, cioè $\sin^2 x - x^2 = o(x^2)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2} = 0$$

Esempio 4 $\sin(x^2)$

$$\sin t = t + o(t)$$

Pongo $t = x^2$; $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$

Esempio 5 $\log(1 + \tan^3(2x)) =$

Brutalmente: $\log(1 + \tan^3(2x)) \sim \log(1 + (2x)^3)$
 $\uparrow$
 $\tan(2x) \sim x$
 $= \log(1 + 8x^3)$
 $\sim 8x^3$
 $\uparrow$
 $\log(1+t) \sim t$

Giustificazione più formale: parto da $\log(1+t) = t + o(t)$

Pongo $t = \tan^3(2x)$ e ottengo

$$\log(1 + \tan^3(2x)) = \tan^3(2x) + o(\tan^3(2x))$$

Ora $\tan(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$, quindi

$$\begin{aligned} \tan^3(2x) &= (2x + o(x))^3 = 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot o(x) + 3 \cdot 2x [o(x)]^2 + [o(x)]^3 \\ &= 8x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \\ &= 8x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Tornando al Logaritmo:

$$\begin{aligned} \log(1 + \tan^3(2x)) &= 8x^3 + o(x^3) + o(8x^3 + o(x^3)) \\ &= 8x^3 + o(x^3) + \boxed{o(8x^3)} + \boxed{o(o(x^3))} = 8x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Esempio 6 $e^{x+\sin x}$

Brutale $e^{x+\sin x} \sim e^{2x} \sim 1+2x$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\sin x \sim x$ $e^t \sim 1+t$

Rigoroso: parto da $e^t = 1+t+o(t)$ e sostituisco $t = x+\sin x$

$$\begin{aligned} e^{x+\sin x} &= 1 + x + \boxed{x+\sin x} + o(x+\sin x) \\ &= 1 + x + \boxed{x+o(x)} + o(x+x+o(x)) \\ &= 1 + 2x + o(x) + o(2x+o(x)) \\ &= 1 + 2x + o(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \arcsin(3x) - \cos(x^2) + \log(1+x^5 \tan x)}{\arctan(3x+x^2) + \sin x}$$

Brutale: $e^{\arctan x} \sim e^x \sim 1+x$

$$\arcsin(3x) \sim 3x$$

$$\cos(x^2) \sim 1$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\sin x \sim x$$

$$\arctan(3x+x^2) \sim 3x+x^2 \sim 3x$$

Denominatore: $\sim 3x+x$ (Detto meglio: $4x+o(x)$)

$$\log(1+x^5 \tan x) \sim \overset{\substack{\uparrow \\ \log(1+t) \sim t}}{x^5 \tan x} \sim \overset{\substack{\uparrow \\ \tan x \sim x}}{x^6} = o(x)$$

$$\text{Frazione} \sim \frac{4x}{4x} \sim 1.$$