

Proprietà di o piccolo

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$

Nuove proprietà Supponiamo che $f(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$ per $x \rightarrow x_0$
Cosa possiamo dire di $f(x)$?

Ipotesi: $f(x) = (g_1(x) + g_2(x)) \cdot w(x) = \underbrace{g_1(x) \cdot w(x)}_{o(g_1(x))} + \underbrace{g_2(x) \cdot w(x)}_{o(g_2(x))}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$

Quindi

$$f(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x))$$

$$o(g_1 + g_2) = o(g_1) + o(g_2)$$

Supponiamo che $f(x) = o(ag(x))$ per $x \rightarrow x_0$ (con $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Ipotesi: $f(x) = ag(x) \cdot w(x) = \underbrace{aw(x)}_{w_1(x)} g(x) = w_1(x) g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = a \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = a \cdot 0 = 0$$

Quindi

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$o(ag) = o(g)$$

Esempio 1 $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Lo verifico con la definizione quasi equivalente, cioè divido per x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{x}_0 = 0$$

$$x = o(\sqrt{x}) \text{ per } x \rightarrow 0^+ \text{ Infatti } x = \sqrt{x} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

Quindi immediatamente $\sin(x^2) = o(\sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$ (transitività).

Sviluppi Per $x \rightarrow 0$ si ha che

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$\sin x = x + o(x)$ $\overset{f(x)}{\sin x - x} = o(x) \overset{g(x)}{}$ per $x \rightarrow 0$. Lo verifico con la definizione quasi equivalente (posso dividere per x):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

Allo stesso modo, usando gli analoghi limiti notevoli, si dimostrano gli sviluppi per $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$

$e^x = 1 + x + o(x)$ Vuol dire che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.
Def. quasi equivalente;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

[Esercizio: dim. lo sviluppo di $\log(1+x)$ usando il lim. notevole]

$\cos x = 1 + o(x)$ Devo verificare che $\cos x - 1 = o(x)$. Def. quasi equiv:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{0} = 0$$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ Devo verificare che $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$
Def. quasi equiv.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Consideriamo i 2 sviluppi del coseno

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Allora il 2° implica il 1°, cioè il 2° dà più informazioni del primo.

Infatti $x^2 = o(x)$ (verifica a mente), quindi $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}o(x) = o(x)$

Inoltre $o(x^2) = o(o(x)) = o(x)$.

Ma allora dal 2° sviluppo otteniamo che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x)$$

Osservazione $x^a = o(x^b)$ per $x \rightarrow 0$ se e solo se $a > b$

Dim. Divido: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{a-b} = 0$ se e solo se $a-b > 0$,
cioè se e solo se $a > b$.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x + 3 \sin x}{e^x - 1 + 2 \arcsin x} = \frac{4}{3}$

Scrivo gli sviluppi di numeratore e denominatore

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$3 \sin x = 3x + 3o(x) = 3x + o(x)$$

Numeratore: $x + o(x) + 3x + o(x) = 4x + o(x)$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$2 \arcsin x = 2x + 2o(x) = 2x + o(x)$$

Denominatore: $e^x - 1 + 2 \arcsin x =$

$$= \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} + 2x + o(x) = 3x + o(x)$$

In conclusione:

$$\text{Frazione} = \frac{4x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot \omega(x)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x + 3 \arctan x} = \frac{1}{5}$

Uso gli sviluppi:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\text{Numeratore} = \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\text{Denominatore} = 2x + 3(x + o(x)) = 2x + 3x + 3o(x) = 5x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{x + o(x)}{5x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(5 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{1}{5}$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + 3 \tan x}{\arcsin(7x) + 2 \arctan x} = \frac{5}{9} \quad \left[\sim \frac{5x}{9x} \right]$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\arcsin(7x) = 7x + o(7x) = 7x + o(x)$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) + 3 \tan x}{\arcsin(7x) + 2 \arctan(x^2)} = \frac{3}{7} \quad \sim \frac{3x}{7x}$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin(2x^2) = 2x^2 + o(2x^2) = 2x^2 + o(x^2) \quad x^2 = o(x)$$

$$= o(x) + o(o(x))$$

$$= o(x) + o(x)$$

$$= o(x)$$

Quindi $\sin(2x^2) = o(x)$ Idem per $\arctan(x^2) = o(x)$

[Esercizio: rifare tutto con i limiti notevoli]

— o — o —