

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 025

Titolo nota

12/10/2012

Esercizio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \arcsin(3x) - \cos(x^2) + \log(1+x^5 \tan x)}{\arctan(3x+x^2) + \sin x} = 1 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Raccolgo x sopra e sotto (al numeratore aggiungo e tolgo 1)

$$\cancel{x} \left(\frac{e^{\arctan x} - 1}{x} + \frac{\arcsin(3x)}{x} + \frac{1 - \cos(x^2)}{x} + \frac{\log(1+x^5 \tan x)}{x} \right) \div \cancel{x} \left(\frac{\arctan(3x+x^2)}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) \rightarrow \frac{4}{4} = 1$$

Svolgo i 6 limiti uno per volta:

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} \cdot \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1$$

$y = \arctan x \downarrow 1$ $\downarrow 1$

$$\frac{\arcsin(3x)}{x} = \frac{\arcsin(3x)}{3x} \cdot 3 \rightarrow 3$$

$\downarrow 1$

$$\frac{1 - \cos(x^2)}{x} = \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \cdot x^3 \rightarrow 0$$

$y = x^2 \downarrow \frac{1}{2}$ $\downarrow 0$

$$\frac{\log(1+x^5 \tan x)}{x} = \frac{\log(1+x^5 \tan x)}{x^5 \tan x} \cdot x^4 \tan x \rightarrow 0$$

$y = x^5 \tan x \downarrow 1$ $\downarrow 0$

$$\frac{\arctan(3x+x^2)}{x} = \frac{\arctan(3x+x^2)}{3x+x^2} \cdot (3+x) \rightarrow 3$$

$y = 3x+x^2 \downarrow 1$ $\downarrow 3$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$

— 0 — 0 —

o piccolo Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, pensato come punto in cui fare i limiti.

Def. Si dice che $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w(x)$ t.c.

$$f(x) = w(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

(In parole povere: $f(x) = g(x) \cdot$ funzione che tende a 0 per $x \rightarrow x_0$)

Def. quasi equivalente Supponiamo di poter dividere per $g(x)$ (questo è possibile se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 , tranne al più per $x = x_0$).

Allora $w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ quindi la 2ª condizione diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(Brutalmente è come dire che $f(x)$ batte $g(x)$ quando faccio il lim in x_0)

Esempio 1 In tutti gli esempi prendiamo $x_0 = 0$

Dico che $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(x) & g(x) \end{array}$$

Infatti $x^3 = x^2 \cdot x$ e $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(x) & w(x) & g(x) & & x_0 \end{array}$$

Con la def. quasi equivalente calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Esempio 2 Dico che $\arctan(x^3) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(x) & g(x) \end{array}$$

Con la def. quasi equiv. devo dividere per x^2 , e posso farlo e ottengo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\arctan(x^3)}{x^3}}_{1} \cdot \underbrace{x}_{0} = 0$$

Con la def. ufficiale devo scrivere $\underbrace{\arctan(x^3)}_{f(x)} = \underbrace{x^2}_{g(x)} \underbrace{\frac{\arctan(x^3)}{x^2}}_{w(x)}$

Devo verificare che

$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$, ma è esattamente il limite di sopra.

Esempio 3 Dico che $\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{f(x)} = o\left(\underbrace{\frac{1}{\arctan^2 x}}_{g(x)}\right)$ per $x \rightarrow 0$

Uso def. quasi equivalente e calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \cdot \arctan^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_1 \underbrace{\frac{\arctan^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{x}_0 = 0$$

Nota che in questo esempio $\underbrace{f(x)}_0$ e $\underbrace{g(x)}_0$ non tendono a 0 per $x \rightarrow 0$.

Proprietà algebriche di o piccolo Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad f_2(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Cosa possiamo dire di $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, o f_1 ?
↑ numero

$$\boxed{f_1 + f_2} \quad \text{Ipotesi: } f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x) \quad f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} w_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } f_1(x) + f_2(x) &= g(x) \cdot w_1(x) + g(x) \cdot w_2(x) \\ &= g(x) \cdot \underbrace{(w_1(x) + w_2(x))}_{w_3(x)} \end{aligned}$$

$$= g(x) \cdot w_3(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (w_1(x) + w_2(x)) = 0 + 0 = 0$$

Quindi

$$\boxed{f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))}$$

$$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

$$f_1 - f_2$$

$$f_1(x) - f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{(\omega_1(x) - \omega_2(x))}_{\omega_3(x)} = g(x) \cdot \omega_3(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\omega_1(x) - \omega_2(x)) = 0 - 0 = 0$$

Quindi

$$f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

$$a f_1(x)$$

$$a f_1(x) = a g(x) \cdot \omega_1(x) = \underbrace{a \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x)} \cdot g(x) = \omega_3(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot \omega_1(x) = a \cdot 0 = 0$$

Quindi

$$a f_1(x) = o(g(x))$$

$$a o(g) = o(g)$$

$$f_1 \cdot f_2$$

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot f_2(x) &= g(x) \cdot \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x) \\ &= \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} [g(x)]^2 = \omega_3(x) \cdot [g(x)]^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \dots = 0 \cdot 0 = 0$$

Quindi

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$\frac{f_1}{f_2}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot \omega_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \frac{0}{0} = \text{Boh.}$$

Non si può dire nulla sul rapporto $\frac{f_1}{f_2}$ (Brutalmente: "f₁ batte g", "f₂ batte g", ma questo non dà informazioni su chi vince tra f₁ ed f₂)

Transitività di o piccolo

Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e

$g(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora

$$f(x) = o(R(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dim. Ipotesi: $f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$

$g(x) = R(x) \cdot \omega_2(x)$, quindi

$$f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) = R(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = 0 \cdot 0 = 0$$