

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 024

Titolo nota

11/10/2012

Razionalizzazioni

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+5}$

Brutale: $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = x - x = 0$

NO!!!

Rigoroso: "razionalizzazione": $\sqrt{A} - \sqrt{B} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

$$\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+5} \cdot \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{x^2}+3x+1 - \cancel{x^2}-5}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+5}}$$

$$= \frac{\cancel{x} \left(3 - \frac{4}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}\right)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Trucco: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

$\sqrt{A} \sqrt{B}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Esempio 2 $\sqrt{n^4+3n^2+2} - n^2$ $[= +\infty - \infty]$

$$= (\sqrt{n^4+3n^2+2} - \sqrt{n^4}) \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{n^4}+3n^2+2 - \cancel{n^4}}{\sqrt{n^4+3n^2+2} + \sqrt{n^4}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

raccolgo n^2 al num
 n^4 nelle $\sqrt{\dots}$

Esempio 3 $\sqrt[3]{n^3+5n^2} - \sqrt[3]{n^3+2}$ $[+\infty - \infty]$

La formula di partenza è $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

La applico con $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$. Otengo

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \frac{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

razionalizz.
 radici
 CUBICHE

Tornando all' esempio

$$\sqrt[3]{m^3+5m^2} - \sqrt[3]{m^3+2} = \frac{\cancel{m^3}+5\cancel{m^2}-\cancel{m^3}-2}{\sqrt[3]{(\cancel{m^3}+5\cancel{m^2})^2} + \sqrt[3]{(\cancel{m^3}+5\cancel{m^2})(\cancel{m^3}+2)} + \sqrt[3]{(\cancel{m^3}+2)^2}} \rightarrow \frac{5}{3}$$

Formalmente: raccolgo m^2 al numeratore e raccolgo m^6 dentro ogni radice.

[Esercizio: trovare la formula per razionalizzare $\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$]

Esempio 4 $\sqrt{m+5} - \sqrt[3]{m^2+3}$ $[+\infty - \infty]$

Non c'è un modo ragionevole di razionalizzare

Brutale: $\sim m^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{2}{3}}$ quindi vince $m^{\frac{2}{3}}$

Rigoroso: $\sqrt{m\left(1+\frac{5}{m}\right)} - \sqrt[3]{m^2\left(1+\frac{3}{m^2}\right)} = \sqrt{m} \sqrt{1+\frac{5}{m}} - m^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1+\frac{3}{m^2}}$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$= \underbrace{m^{\frac{2}{3}}}_{+\infty} \left(\underbrace{m^{-\frac{1}{6}}}_0 \left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{5}{m}}}_0 - \underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{3}{m^2}}}_1 \right) \right) \rightarrow +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3\sqrt{x}}{5x^2 + 7\sqrt{x}} = \frac{2}{5}$ (raccolgo x^2 sopra e sotto)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 3\sqrt{x}}{5x^2 + 7\sqrt{x}} = \frac{3}{7}$ (raccolgo $\sqrt{x}$ sopra e sotto)

$$\frac{2x^2 + 3\sqrt{x}}{5x^2 + 7\sqrt{x}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \frac{2x\sqrt{x} + 3}{5x\sqrt{x} + 7} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{7}$$

$$\frac{2x^2 + 3\sqrt{x}}{5x^2 + 7\sqrt{x}} = \frac{\cancel{x^2} \left(2 + \frac{3}{x\sqrt{x}} \right)}{\cancel{x^2} \left(5 + \frac{7}{x\sqrt{x}} \right)}$$

Questo va bene se $x \rightarrow +\infty$ perché diventa una forma non indeterminata.

Se $x \rightarrow 0^+$ diventa $\frac{+\infty}{+\infty}$ e non ho concluso nulla

Morale: a $+\infty$ contano le potenze con esponenti + grandi, a 0 contano le potenze con esponenti più piccoli.

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2^x}{5x^2 + 2^x} = 1$ $\left[\sim \frac{2^x}{2^x} \right]$ raccogliere 2^x

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2^x}{5x^2 + 2^x} = 1$ $\left[\frac{1}{1} : \text{non è una forma indeterminata.} \right]$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2^x}{5x^2 + 2^x} = \frac{3}{5}$ raccogliere x^2 sopra e sotto; nota bene che

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$

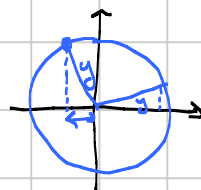
Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} \left[= \frac{0}{\pi - \pi} = \frac{0}{0} \right]$

Trucco: spostare (se possibile) il limite a 0 oppure a $+\infty$.

Pongo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ho che $y \rightarrow 0$
 $x = y + \frac{\pi}{2}$

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\pi - 2(y + \frac{\pi}{2})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\cancel{\pi} - 2y - \cancel{\pi}} \left[= \frac{0}{0} \right]$

Precorso: $\cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$



$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{-2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}$

NO!!!!!! $\sqrt{x^2} = x$ ok solo per $x \geq 0$

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} + x$

Pongo $y = -x$, quindi $y \rightarrow +\infty$

$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 + 3} - y = \text{rationalizz.} = 0$

$\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} + x$

$= x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + x = \boxed{x} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{\boxed{x^2}}} + 1 \right)$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $-\infty \quad \quad \quad 0$
 $\rightarrow -\infty \cdot 1 = -\infty$