

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 023

Titolo nota

11/10/2012

IL NUMERO e Sottotitolo: dimostrare che la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ha un limite reale compreso tra 2 e 3.

SUCCESIONI MONOTONE

Def. Una succ. a_n si dice

- debolmente crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- strettamente crescente " $a_{n+1} > a_n$ "
- debolmente decrescente " $a_{n+1} \leq a_n$ "
- strettamente decrescente " $a_{n+1} < a_n$ "

Oss. Una successione è debolmente crescente nel senso appena definito

se e solo se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$

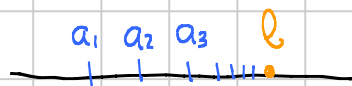
Idem per le altre 3 possibilità

[Esercizio: dimostrare l'equivalenza tra i 2 modi di dare la definizione]

Teorema (in versione crescente) Sia a_n una succ. debolmente crescente (se è strettamente crescente, ancora meglio). Allora sono possibili solo due tipi di comportamento:

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$



In ogni caso il limite (sia esso reale o $+\infty$) è il sup della succ.
$$a_n \rightarrow \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Oss. Vale un teorema analogo per successioni debolmente decrescenti

$$a_n \rightarrow \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Dim. Ci sono 2 casi, a seconda che $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$.

Caso 1: $\sup = +\infty$ Ipotesi: $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$



Sia dato un qualunque $M \in \mathbb{R}$. Per ipotesi esiste

un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$

Poiché a_n è debolm. crescente, avremo che $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi $a_n \geq M$ definitivamente.

Caso 2: $\sup = L$ Ipotesi: $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = L \in \mathbb{R}$

Tesi: $a_n \rightarrow L$



Voglio dimostrare che $\forall \epsilon > 0$ si ha che

$L - \epsilon \leq a_n \leq L + \epsilon$ definitivamente.

Fisso $\epsilon > 0$. Per ipotesi il sup è L , quindi

(i) $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (cioè L è un maggiorante)

Questo ci dice gratis che $a_n \leq L + \epsilon$ definitivamente.

(ii) esiste un elemento della successione che sta tra $L - \epsilon$ ed L , cioè

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq L - \epsilon$

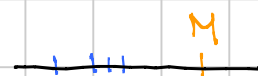
Ma essendo a_n debolmente crescente avremo che $a_n \geq a_{n_0} \geq L - \epsilon$ per ogni $n \geq n_0$, cioè definitivamente.

[Esercizio: capire la dimostrazione e rifarla in versione decrescente]

Consideriamo la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dimostriamo che

① $e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$ ② $e_n \leq 3 \quad \forall n \geq 1$ ③ e_n è debolmente crescente

Corollario teo. succ. monotone Sia a_n una successione



① debolmente crescente, cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

② limitata superiormente, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Allora $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (ovviamente $l \leq M$)

[Esercizio: adattarlo in versione decrescente]

Dim. che $e_n \geq 2$ per ogni $n \geq 1$ Partiamo dalla Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Con $x = \frac{1}{n}$ otteniamo $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$

Dim. che e_n è debolmente crescente Ci basta dimostrare che $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$

$$e_n \geq e_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

Applico $(1+x)^n \geq 1+nx$ con $x = -\frac{1}{n^2}$ (ricordo che Bernoulli valeva $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$, quindi $x = -\frac{1}{n^2}$ va bene)

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo dimostra che l'ultima disuguaglianza è vera, ma l'ultima è equivalente a $e_n \geq e_{n-1}$.

Dim. che $e_n \leq 3$ $(1+x)^n$ si sviluppa con il Binomio di Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

La applico con $x = \frac{1}{n}$. Ottengo

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \binom{n}{0} \cdot \frac{1}{n^0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n^1} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$n! \geq 2^{k-1}$$

(si dimostra per induzione)

$$\begin{aligned} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\quad \uparrow \text{denominatore} \\ &\quad \text{più piccolo =} \\ &\quad \text{frazione + grande} \end{aligned}$$
$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot 2$$

$$= 1 + 2 - \frac{2}{2^n}$$

$$= 3 - \frac{2}{2^n} < 3$$

Questo dimostra che $e_n \leq 3$ (anzi $e_n < 3$).

Più formalmente abbiamo usato che $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, che volendo

si dimostra per induzione.

— o — o —