

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 022

Titolo nota

10/10/2012

SOTTOSUCCESSIONI Sottotitolo: come si fa a dimostrare che un certo limite NON ESISTE (tipo ④)

Data una successione a_n , prendere una sottosuccessione vuol dire considerare solo alcuni termini

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

Come prendere i termini? Pescando gli indici in maniera crescente.

Esempi $a_{2m} =$ sottosuccessione dei termini di indice pari
 $= a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

$a_{2m+1} =$ stessa cosa con i dispari
 $= a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$

$a_{4m+2} = a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, a_{18}, \dots$

$a_{m^2} =$ sottosuccessione dei termini i cui indici sono quadrati perfetti $= a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \dots$

Teorema Sia a_n una successione e sia a_{k_n} una sua sottosucc.,
 $\uparrow$ regola che descrive quali indici vengono selezionati

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $a_{k_n} \rightarrow l$ (stesso l)

(Se una successione ha un limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite).

Achtung! Se a_n non ha limite, cioè è di tipo ④, non è detto che le sottosuccessioni siano tutte di tipo ④.

Esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Però

$$\bullet a_{2n} = (-1)^{2n} \rightarrow 1$$

$$\bullet a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \rightarrow -1$$

quindi le sottosucc. dei pari e dei dispari hanno limite.

Utilizzo operativo Data una succ. a_n , supponiamo di trovare 2 sottosucc. che hanno limiti DIVERSI.

Allora di sicuro a_n non ha limite

[Dim.: se fosse che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere allo stesso l].

Come dimostrare che una successione a_n non ha limite? Basta trovare 2 sottosuccessioni con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = n^2 + (-3)^n$

Considero i pari ed i dispari:

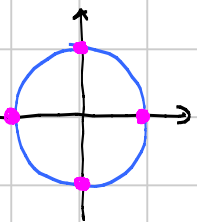
$$a_{2n} = (2n)^2 + (-3)^{2n} = 4n^2 + 9^n \rightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)^2 + (-3)^{2n+1} = 4n^2 + 4n + 1 - 3 \cdot 9^n \rightarrow -\infty$$

$\hookrightarrow$ basta raccogliere 9^n

Avevo trovato 2 sottosucc. con comportamento diverso, il limite di a_n NON ESISTE

Esempio 2 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$



$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow 1$$

$\uparrow$
multipli di
4 più 1

Potrei prendere anche a_{4n+3} e tendeva a -1 .

Esempio 3 $a_n = 2^n + (-1)^n \cdot n^5 = \begin{cases} 2^n + n^5 & \text{per } n \text{ pari} \\ 2^n - n^5 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Oss.: il cambio di segno avviene sul termine che non comanda, quindi non dovrebbe contare nulla

Rigoroso: raccordo 2^n : $\boxed{2^n} \left(1 + \underbrace{(-1)^n \frac{n^5}{2^n}}_0 \right) \rightarrow +\infty \cdot 1 = +\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0

Per l'altro termine: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ (banale)

Moltiplico per $\frac{n^5}{2^n}$:

$$\boxed{-\frac{n^5}{2^n}} \leq \underbrace{(-1)^n \frac{n^5}{2^n}}_0 \leq \boxed{\frac{n^5}{2^n}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Come dimostrare che un limite di funzioni non esiste?

Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ (anche $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$).

Sia a_n una qualunque successione tale che $a_n \rightarrow x_0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

$\uparrow$
Pongo $x = a_n$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $x \rightarrow x_0$

Supponiamo invece che esistano $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{con } l_1 \neq l_2.$$

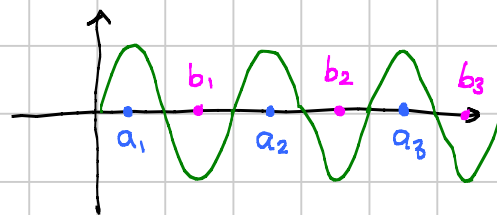
Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ NON ESISTE

[Dim.: se esistesse e fosse un certo $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora avremmo che $l_1 = l_2 = l$].

Operativamente: come dimostro che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste?

Basta trovare 2 successioni $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi,

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ NON ESISTE.



Dov'è trovare $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c.

$$\sin(a_n) \rightarrow l_1, \sin(b_n) \rightarrow l_2, l_1 \neq l_2$$

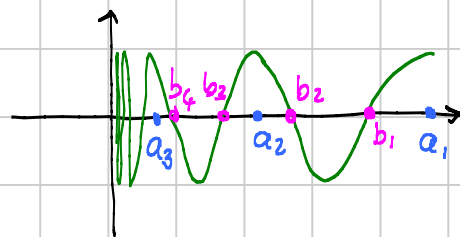
$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow +\infty$$

$$\sin(a_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$\sin(b_n) = -1 \rightarrow -1$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x^2}$ NON ESISTE



Dov'è trovare $a_n \rightarrow 0^+$ e $b_n \rightarrow 0^+$ t.c.

$$\cos \frac{1}{a_n^2} \rightarrow l_1, \cos \frac{1}{b_n^2} \rightarrow l_2, l_1 \neq l_2$$

$$\cos \frac{1}{a_n^2} = 1, \text{ prendo } \frac{1}{a_n^2} = 2\pi n, \text{ quindi } a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0^+$$

$$\cos \frac{1}{b_n^2} = 0, \text{ prendo } \frac{1}{b_n^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ quindi } b_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \rightarrow 0^+$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$a_n \rightarrow 7 \Rightarrow a_{2n+1} \rightarrow 15$$

PORCHERIA !!

$$a_n \rightarrow 7 \Rightarrow a_{2n+1} \rightarrow 7$$

VERA: sottosuccessione

$$a_n \rightarrow 8 \Rightarrow a_{2n} \rightarrow 8$$

" "

$$a_{2n} \rightarrow 8 \Rightarrow a_n \rightarrow 8$$

FALSA: su' d'spani non so nulla

$$a_{n+7} \rightarrow 5 \Rightarrow a_n \rightarrow 5$$

VERA !! Sottosucc. FALSA salta solo 5 termini

$$a_n \rightarrow 5 \Rightarrow a_{n+7} \rightarrow 5$$

VERA: sottosuccessione

$$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \cos(a_n) \text{ non ha limite}$$

FALSA !!

esempio: $a_n = 2\pi n$