

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 021

Titolo nota

10/10/2012

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \text{Dimostriamo questo risultato.}$$

Osservazione 1 La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è PARI. Quindi basta dim. che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (\text{cioè basta il limite per } x \rightarrow 0^+).$$

Osservazione 2

Supponiamo di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Divido per $\sin x$ (lo posso fare senza cambiare i versi poiché $\sin x > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$).

Otteniamo

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}$$

quindi

$$\boxed{1} \leq \boxed{\frac{x}{\sin x}} \leq \boxed{\frac{1}{\cos x}} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

limiti per $x \rightarrow 0^+ \rightarrow$

↓ ↓ ↓
1 1 1
per l'Hôpital

Quindi tutto si riduce a dimostrare la disuguaglianza.

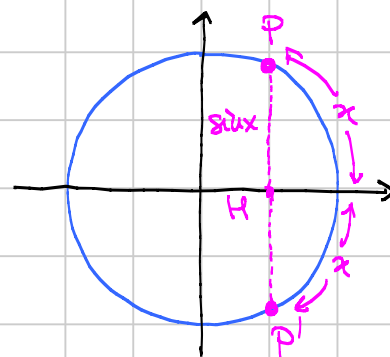
$$\boxed{\sin x \leq x \text{ per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})}$$

$$PP' = 2PH = 2 \sin x \quad (\text{lunghezza segmento } PP')$$

$$\widehat{PP'} = 2x \quad (\text{lunghezza arco } \widehat{PP'})$$

lunghezza segmento $\leq$ lunghezza arco (motivi geometrici)

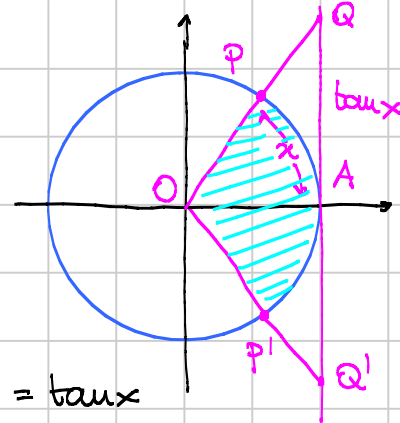
$$2 \sin x \leq 2x$$



$$x \leq \tan x \text{ per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

x = lunghezza arco $\widehat{AP}$

$\tan x$ = lunghezza segmento AQ



$$\text{Area triangolo } OQQ' = \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{QQ'} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{OA} = \frac{1}{2} \cdot 2 \tan x \cdot 1 = \tan x$$

Calcolo l'area del settore circolare OPP' !

Area Settore : lunghezza arco = Area cerchio : lung. circ. intera

$$\text{Area Settore : } 2x = \underset{\substack{\downarrow R=1}}{\pi} : \underset{\substack{\downarrow R=1}}{2\pi}$$

$$\text{Area settore } OPP' = \frac{2x \cdot \pi}{2\pi} = x$$

Ora per ragioni geometriche si ha che Area sett. $OPP' \leq$ Area triangolo OQP' ,
quindi $x \leq \tan x$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Il limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ si dimostrerebbe a partire dal
corrispondente limite per le
successioni

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \quad \left[\frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right]$

Ricorda il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \overbrace{(\cos x - 1)}^t)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\downarrow -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Per fare il 1° limite pongo $t = \cos x - 1$;

quando $x \rightarrow 0$ ho che $t \rightarrow \cos 0 - 1 = 0$,

quindi il 1° limite diventa il $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t}$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ [= 1⁰]

Bisogna passare all'esponenziale $[A^B = e^{B \log A}]$, quindi

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos x)}$$

↓
 $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

— 0 — 0 —

Ora basta fare il limite dell'esponente
(fatto prima)

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - \cos x + \arctan 2x}{x}$ [= $\frac{e^0 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0}$]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1 + 1 - \cos x + \arctan 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\tan x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{\arctan 2x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x + \frac{\arctan 2x}{2x} \cdot 2 \right) = 3$$

pongo $y = \tan x \dots$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\cdot$ 1 $+$ $\frac{1}{2}$ $\cdot$ 0 $+$ 1 $\cdot$ 2
 — 0 — 0 —

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+2^x)}{x}$

1° modo $\frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\log(1+2^x)}{2^x} \cdot \frac{2^x}{x} \rightarrow +\infty$

$y = 2^x \downarrow$
 $\downarrow$
 1

$\downarrow$
 $+\infty$

esponenziale batte potenza

NO!! Quando $x \rightarrow +\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$, quindi non posso usare il limite notevole

2° modo $\frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\text{Logaritmo}}{\text{potenza}} \rightarrow 0$

NO!! Il limite in tabellina è $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$
 non $\log(\text{altra roba})$
 x

3° modo

Brutalmente: $\frac{\log(1+2^x)}{x} \sim \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{\cancel{x} \log 2}{\cancel{x}} = \log 2$

Rigorosamente: di comando, si raccoglie!

$$\frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\log(2^x \cdot (1 + \frac{1}{2^x}))}{x} = \frac{\log 2^x + \log(1 + \frac{1}{2^x})}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x} \log 2}{\cancel{x}} + \frac{\boxed{\log(1 + \frac{1}{2^x})} \rightarrow 0}{\boxed{x} \rightarrow +\infty} \rightarrow \log 2 + 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{2}{3}$$

$$\sim \frac{\log x^2}{\log x^3} = \frac{2 \log x}{3 \log x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{\log[x^2(1 + \frac{2}{x^2})]}{\log[x^3(1 + \frac{3}{x^3})]} = \frac{\log x^2 + \log(1 + \frac{2}{x^2})}{\log x^3 + \log(1 + \frac{3}{x^3})}$$

$$= \frac{\cancel{\log x} \left\{ 2 + \frac{\boxed{\log(1 + \frac{2}{x^2})} \rightarrow 0}{\boxed{\log x} \rightarrow +\infty} \right\}}{\cancel{\log x} \left\{ 3 + \frac{\boxed{\log(1 + \frac{3}{x^3})} \rightarrow 0}{\boxed{\log x} \rightarrow +\infty} \right\}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

— 0 — 0 —

Esempio 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x-1)}{\arctan(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\boxed{\sin(e^x-1)}}{\boxed{e^x-1}} \cdot \frac{\boxed{e^x-1}}{\boxed{x}} \cdot \frac{\boxed{x}}{\boxed{\arctan(3x)}}$$

$y = e^x - 1$
 $y \rightarrow 0$
 $\frac{\sin y}{y} \rightarrow 1$
 $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$
 $\frac{x}{\arctan(3x)} \rightarrow \frac{1}{3}$

— 0 — 0 — = $\frac{1}{3}$