

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 020

Titolo nota

06/10/2012

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, da cui $x = \frac{1}{y}$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow +\infty$
 " $x \rightarrow 0^-$, " $y \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = \log e = 1 \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \log \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = \log e = 1$$

e anche per $y \rightarrow -\infty$

Osservazione Ad essere rigorosi, l'ultimo passaggio va giustificato.
 Nel caso (*) dovei dire

Pongo $z = \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y$. Quando $y \rightarrow +\infty$, ho che $z \rightarrow e$ (limite padre).

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = \lim_{z \rightarrow e} \log z = \log e = 1$$

perché $\log$ è funzione continua

Osservazione Avendo dimostrato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Pongo $y = e^x - 1$, da cui $e^x = y + 1$, $x = \log(y+1)$
 Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow e^0 - 1 = 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

TRUCCO DELL'ESPOENZIALE:

base ed esponente strano? e-alla !!!

$$A^B = e^?$$

$$? = \log A^B = B \log A$$

$$A^B = e^{B \log A}$$

tutti i pblm. sono ora all'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a$$

Pongo $y = x \cdot \log a$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0 \cdot \log a = 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_1 \cdot \log a = \log a$$

Confronti di ordini di infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \forall a > 1 \quad \forall b > 0$$

Conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

POTENZE
BATTONO
LOGARITMI

Come si dimostra? Pongo $y = \log x$. Quando $x \rightarrow +\infty$ ho che $y \rightarrow +\infty$
($x = e^y$)

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^a}{(e^y)^b} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^a}{(e^b)^y} = 0$$

potenza diviso
esponenziale con
base $e^b > 1$ perché $b > 0$

Limite dimenticato

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, da cui $x = \frac{1}{y}$
Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow +\infty$

PRECORSO!

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \cdot \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} (-\log y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} - \frac{\log y}{y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^{2000} x}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad (\text{è sempre log contro potenza}).$$

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI

I limiti di funzione aiutano i limiti di successioni

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$

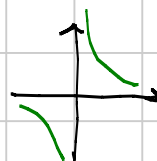
Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt[n]{2} - 1)$ $[+\infty (1-1) = +\infty \cdot 0 : \text{forma indeb.}]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \log 2$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ NON ESISTE $[= \frac{1}{0} : \text{occhio al segno}]$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$

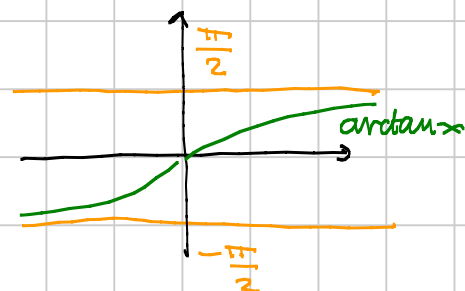


Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} [= \frac{1}{0^+} \text{ comunque}] = +\infty$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(\log(3+x^2))}{\sqrt{x}-2} = 0$

$-\frac{\pi}{2} < \arctan(\text{Mostro}) < \frac{\pi}{2}$

Divido per $\sqrt{x}-2$ che per x abbastanza grande è > 0 , quindi non cambio i versi.



$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{\arctan(\text{Mostro})}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}-2}$

$\downarrow 0$ $\downarrow \text{carabinieri}$ $\downarrow 0$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}} \cdot \boxed{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}$$

$y = x^2 \rightarrow \downarrow 1$ $\downarrow 1$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin(x^2))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\log(1+\sin(x^2))}{\sin(x^2)}} \cdot \boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}$

$y = \sin(x^2) \rightarrow \downarrow 1$ $y = x^2 \rightarrow \downarrow 1$

Cosa sto facendo: ho scritto la funzione come prodotto di 2 fattori. Calcolo SEPARATAMENTE il limite dei 2 fattori usando cambi di variabile diversi.

Concludo usando il teo. algebrico del prodotto.

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} = 1$ NO !!!!!

$\uparrow$ pongo $y = \cos x$

$= \log 2$ (sostituisco $x=0$ e non ci sono problemi)

Voglio però fare il cambio di variabili

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \cos 0 = 1$

$$= \lim_{\boxed{y \rightarrow 1}} \frac{\log(1+y)}{y} = \log 2 \quad (\text{non è il limite notevole})$$

Esempio 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0$ (il log perde dalle potenze)

Per essere precisi: $\frac{\log\left(x \cdot \frac{1+x}{x}\right)}{x} = \frac{\log x + \log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}$

$$= \boxed{\frac{\log x}{x}} + \boxed{\frac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}} \rightarrow \left[= \frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right] \rightarrow 0$$

$\downarrow$ 0 (tabellina) $\downarrow$ 0