

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 019

Titolo nota

06/10/2012

Strumenti per i limiti di funzioni

- ① Teo. algebrici : come limiti di successioni
- ② Teo. di confronto a 2 e 3 : «
- ③ Radice, rapporto, ... : NO per funzioni
- ④ Continuità
- ⑤ Cambi di variabile
- ⑥ Limiti notevoli : tabellina
- ⑦ Confronti di ordini di ∞ : come con le succ.

Continuità Una funzione $f(x)$ si dice continua in un p.to $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè se la funzione vale in x_0 quello che ci si aspetta vedendo cosa succede per x vicini ad x_0 .

Quali funzioni sono continue e dove Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari (potenze, esponenziali, trigonometriche e relative inverse) mediante operazioni algebriche e/o composizioni sono continue dove non presentano problemi burocratici di definizione (tipo denominatori che si annullano, radici di roba < 0 , ...).

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) + 2^{\sin x}}{\log(3 + x^2)} = \frac{2}{\log 3}$

È tutto tranquillo, basta sostituire $x=0$ e non emergono problemi.

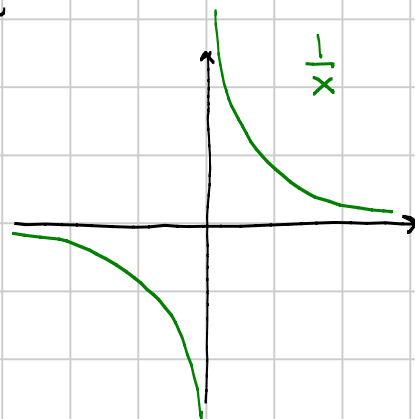
Occhio: $\log x = \ln x = \log_e x$ sono sinonimi
 $\text{Log } x = \log_{10} x$ sono sinonimi

Achtung! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ NON ESISTE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\left[\frac{1}{0^+} = +\infty \right]$$

$$\left[\frac{1}{0^-} = -\infty \right]$$



Limiti notevoli

Tabellina di limiti che si dimostrano una volta per tutte e poi si possono usare.

Padri: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $[1^\infty]$

Figli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $[1^{-\infty}]$

Nipoti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ $[0 \cdot (-\infty)]$

Limite che si tende a dimenticare

CAMBI DI VARIABILI NEI LIMITI

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = x^2$. Quando $x \rightarrow 0$

ho che $y \rightarrow 0^2 = 0$.

Quindi il limite diventa

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ per tabellina

Ho guardato dove tendeva y

funzione cambiata dopo la sostituzione

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = \sin x$.

Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \sin 0 = 0$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ $\uparrow$ Tabellina

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = \sin x$

Quando $x \rightarrow \pi$, ho che $y \rightarrow \sin \pi = 0$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$ $\uparrow$ Tabellina

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ $\frac{1}{2}$ (basta sostituire $x=0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1 (sost. $x=0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$, da cui $x = \tan y$
 Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \arctan 0 = 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

↑ teorema algebrico + limiti precedenti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

Pongo $y = \arcsin x$, da cui $x = \sin y$
 Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow \arcsin 0 = 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Pongo $y = -x$, da cui $x = -y$.
 Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y$$

Pongo $z = y-1$, da cui $y = z+1$
 Quando $y \rightarrow +\infty$, ho che $z \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e \cdot 1 = e$$

$\downarrow$ e $\downarrow$ 1 per teo. algebrico

— 0 — 0 —