

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 018

Titolo nota

06/10/2012

LIMITI DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o più in generale $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,
con $A \subseteq \mathbb{R}$. Vogliamo definire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{con } x_0 \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Oss. Per le successioni si faceva solo il lim per $n \rightarrow +\infty$, ora x
può tendere ad un qualunque $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{con } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{non esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$$

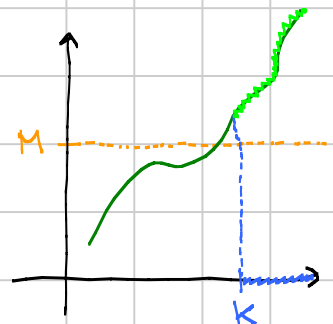
Def. di ④ Nessuna delle precedenti

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$

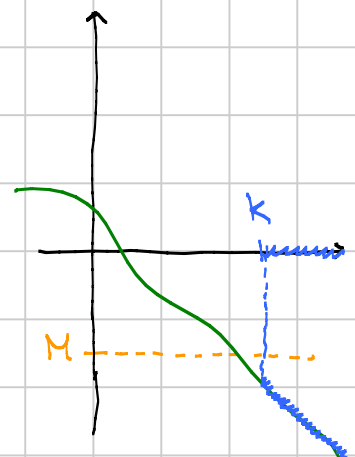
(K dipende dalla funzione e da M : più M è grande,
più potrebbe servire un K grande)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$



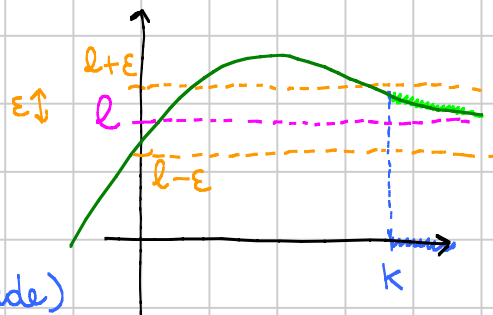
Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq k$

(se ε diventa sempre più piccolo, k diventa più grande)

In alternativa: $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \geq k$
 distanza tra $f(x)$ ed l



Varianti di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$ se $\dots l < f(x) \leq l + \varepsilon \dots$
 l^- $\dots l - \varepsilon \leq f(x) < l \dots$

— 0 — 0 —

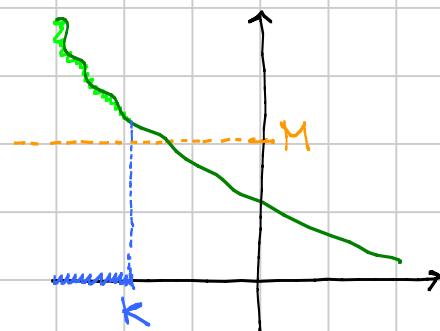
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
 $\nearrow l \in \mathbb{R}$ ①
 $\rightarrow +\infty$ ②
 $\rightarrow -\infty$ ③
 $\searrow$ Non esiste ④ $\leadsto$ N.d.P.

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \leq k$

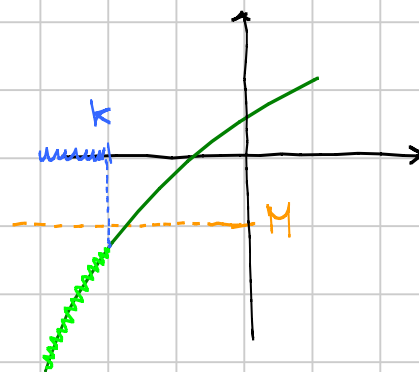
(Quando M diventa molto grande, k diventa molto negativo)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \leq k$



Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

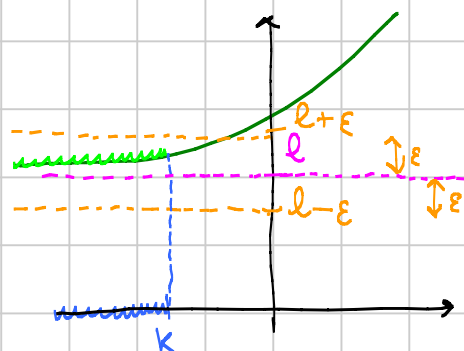
$\forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq k$

$|f(x) - l| \leq \varepsilon$

Stile varianti per l^+ ed l^-

— 0 — 0 —



$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{non esistere} \end{cases}$$

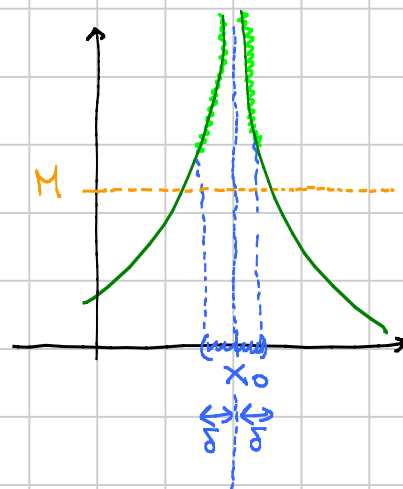
- ①
- ②
- ③
- ④

Nessuno dei prec.

Def. di ② Si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$



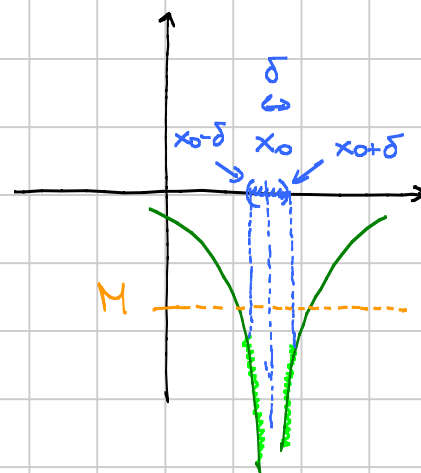
Osservazione La definizione di limite NON chiede nulla alla funzione $f(x)$ per $x = x_0$. La funzione potrebbe anche non essere definita in x_0 , oppure essere definita e non rispettare la relazione.
IL LIMITE SE NE FREGA DEL VALORE IN x_0

Def. di ③ Si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$

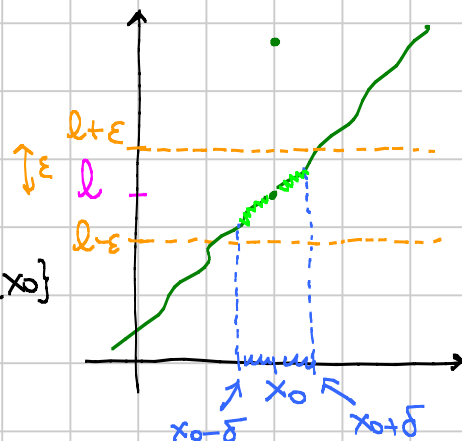
(se prendo M sempre più negativo, dovrò prendere δ sempre più vicino a 0)



Def. di ① Si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$
 $|f(x) - l| \leq \varepsilon$



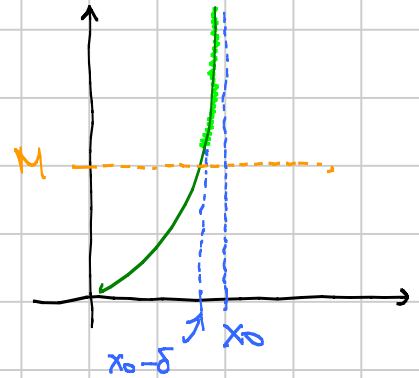
Oss. Ancora una volta il valore di $f(x)$ per $x = x_0$ non è rilevante ai fini del limite ($f(x_0)$ potrebbe anche non essere definito)

Varianze : limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
 x tende ad x_0 da destra x tende ad x_0 da sinistra

Si intende che $f(x)$ deve rispettare la relazione solo per x che sta nella parte dx o sx dell' intorno.

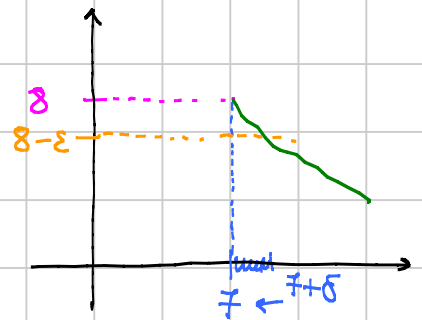
Esempio Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$
 $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$ escluso



Esempio $\lim_{x \rightarrow \tau^+} f(x) = 8^-$

$\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ t.c. $8 - \varepsilon \leq f(x) < 8 \quad \forall x \in (\tau, \tau + \delta]$



$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \tau^+$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\tau < f(x) \leq \tau + \varepsilon \quad \forall x \in [8 - \delta, 8)$.

— o — o — o —