

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 017

Titolo nota

05/10/2012

Criterio rapporto $\rightarrow$ radice Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow$ stesso l

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} \quad [+ \infty^0]$

Uso il criterio con $a_n = n$. Faccio il rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 = l$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$

Piccola estensione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{n}]^a = 1^a = 1$

Ulteriore estensione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3 + 7n^2 - 3} = 1$

$$\sqrt[n]{n^3 + 7n^2 - 3} = \sqrt[n]{n^3 \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^3}\right)} = \underbrace{\left[\sqrt[n]{n}\right]^3}_1 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}}_{1^0 = 1} \rightarrow 1$$

Fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1$ per ogni polinomio

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n + n^{20} + 13} = 7$ $\sim \sqrt[n]{7^n} = 7$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\dots} &= \sqrt[n]{7^n \left(1 + \frac{5^n}{7^n} + \frac{n^{20}}{7^n} + \frac{13}{7^n}\right)} \\ &= 7 \cdot \left(1 + \underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^n}_0 + \underbrace{\frac{n^{20}}{7^n}}_0 + \underbrace{\frac{13}{7^n}}_0\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 7 \cdot 1^0 = 7 \end{aligned}$$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$ [$+\infty^0$: forma indeterminata]

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$ Calcolo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$ $\rightarrow$ TABELLINA

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Ossewo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ Ora applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \\ &= \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{n^n}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$ occhio: l'esponente sopra è n^2 ... $\Rightarrow a_n$

Applico il criterio della radice. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty$$

Poichè $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$. In particolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{3^{n^2}}{n^n}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$

$$\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con
 $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 (n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} = \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2} \rightarrow \frac{4}{e^2} \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{4}{e^2}$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} \rightarrow \frac{4}{e^2}$.

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n! + 7^n}}{3n + 2\sqrt{n}} =$ È come fosse $\frac{\sqrt[n]{n!}}{3n} \rightarrow \frac{1}{3e}$

Per sistemarlo rigorosamente, raccolgo sopra e sotto di comando

$$\frac{\sqrt[n]{n! \left(1 + \frac{7^n}{n!}\right)}}{n \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \left(1 + \frac{7^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{3e}$$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5^n + 8^n}{6^n + 7^n}} = \frac{8}{7}$

Raccolgo 8^n sopra
 7^n sotto

FARE!!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5^n + n^8}{6^n + n^7}} = \frac{5}{6}$$

Raccolgo 5^n sopra
 6^n sotto