

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 016

Titolo nota

05/10/2012

- ① Criterio della radice
- ② Criterio del rapporto
- ③ Criterio rapporto $\rightarrow$ radice

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitivamente.
Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- se $l > 1$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1$ si ha che $a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$ allora BOH (non si può dire nulla)

Operativamente

- Devo fare il limite di a_n e non sono capace
- Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ e mi viene un certo l
- Se $l > 1$ oppure $l < 1$ ora so quanto vale il limite di a_n

CRITERIO DEL RAPPORTO Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente.
Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora stessa conclusione del criterio della radice.

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente.
Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora

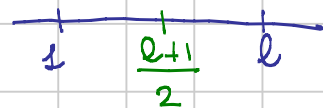
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \text{ (stesso } l \text{)}$$

Quello che viene
facendo il rapporto
viene pure facendo
la radice.

Dim. criterio della radice Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$.

Supponiamo anche che $l \in \mathbb{R}$.

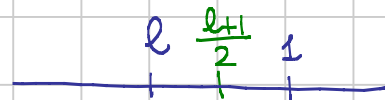
Allora arriva che (stile permanenza del segno)



$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevo alla potenza n -esima e ho:

confronto a 2 $a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ esponenziale con base > 1
 $\downarrow +\infty$ $\downarrow +\infty$

Caso 2 Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$



Ovviamente $l \geq 0$ perché limite di

roba ≥ 0 . Allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$. Elevando

ipotesi $0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ esponenziale con base in $(0,1)$
 $\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$
 carabinieri

[Ex. Fare il caso in cui $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow +\infty$]

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} : \text{forma indeterminata} \right]$
 $\downarrow a_n$

Provo con il criterio del rapporto: devo fare

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 2 \end{aligned}$$

$\downarrow 0$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 2$, per il criterio del rapporto so che $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b}$

Applico il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{a^n} = \frac{a \cdot \cancel{a^n}}{\cancel{n^b} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b} \cdot \frac{\cancel{n^b}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^b} \rightarrow a$$

Se $a > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty$, indipendentemente da b

Se $a \in [0, 1)$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = 0$, " " "

Fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a > 1 \quad \forall b > 0$ ESPONENZIALE BATTE POTENZA

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1.001)^n}{n^{3000}} = +\infty$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{37^n}{n!} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$
 $\Rightarrow a_n$

Applico rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{37^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{37^n} = \frac{37 \cdot \cancel{37^n}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{37^n}} = \frac{37}{(n+1)} \rightarrow 0$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0 < 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$.

Fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1$ FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

(si intende che a^n è esponenziale con base fissa, cioè indipendente da n)

NUMERO e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71\dots$$

Si dimostra che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ha un limite reale compreso tra 2 e 3 (lezioni successive)

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} \quad \left[\begin{array}{c} +\infty \\ +\infty \end{array} \right]$$

$\downarrow a_n$

Applico criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$

$$= \frac{\cancel{(n+1)} (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow e > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Nota bene: anche la base dell'esponenziale dipende da n

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 7^n + n^7 + \cos(n^n)}{2n! + 8^n + n^{700}} = \frac{1}{2}$

$$\sim \frac{n!}{2n!}$$

Rigorosamente: raccolgo $n!$ sopra e sotto.

$$\frac{\cancel{n!} \left(1 + \frac{7^n}{n!} + \frac{n^7}{n!} + \frac{\cos(n^n)}{n!} \right)}{\cancel{n!} \left(2 + \frac{8^n}{n!} + \frac{n^{700}}{n!} \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$