

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 015

Titolo nota

05/10/2012

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2n \quad [= +\infty + \infty] = +\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n \quad [= +\infty - \infty : \text{FORMA INDETERMINATA}]$

Achtung! Achtung! Forma indeterminata NON vuol dire che il limite non esiste, cioè che è di tipo (4).
 Vuol dire solo che non posso decidere il comportamento della somma, differenza, prodotto, quoziente sulla base del comportamento dei 2 singoli pezzi.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-2) \quad [= +\infty \cdot (+\infty) = +\infty]$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 7n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(3-7n) = -\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$
 $+\infty$ $-\infty$ teo. algebrico

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - \sin n$

uso $\sin n \leq 1$

Maggiorazione: $n^3 - \sin n \geq n^3 - 1$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

per confronto a 2
 per teo. algebrico

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$ Per inclusione si è dimostrato che

$2^n \geq n$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Analogamente, se $a > 1$ abbiamo che

$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1 + (a-1)n$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

Disug. di Bernoulli

$a^n \geq 1 + (a-1)n$

$\downarrow$ $\downarrow$ (se $a-1 > 0$ quindi $a > 1$)
 $+\infty$ $+\infty$
 confronto a 2

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \text{per ogni } a > 1$$

a deve essere una
base FISSA, cioè
NON DIPENDE da n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \text{per ogni } a \in (0,1)$$

↓ ogni $a \in (0,1)$ si può pensare come $\frac{1}{b}$ con $b > 1$.

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Esempio 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

Per inclusione:

$$n! \geq 2^n$$

(Bastava $n! \geq n$)

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$
↑ teo. algebrico

"Dim." Disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1$

La uso con $x = \frac{1}{n}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

Faccio la radice n-esima a dx e sx: $1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$

(lo posso fare perché $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è strett.

crescente per $x \geq 0$, quindi posso applicarla conservando i versi).

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\begin{array}{ccccc} & \text{ovvia} & & \text{sopra} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & \leq & \sqrt[n]{2} & \leq & 1 + \frac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0$$

Oss. Quod è la disuguaglianza analoga di $1 \leq \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Caso $a > 1$: $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

Uso Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$: $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + \cancel{n} \frac{a-1}{\cancel{n}} = a, \text{ da cui } 1 + \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a}. \text{ Quindi}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Perché?

Partiamo da $-1 \leq \sin n \leq 1$

Divido per n , che essendo una quantità positiva conserva i versi:

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

per carabinieri

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n^2 + 7^n \cdot n!)}{\sqrt{n}} = 0$

Partiamo da $-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1$

Divido per $\sqrt{n}$ che non cambia i versi e ottengo

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\cos(\text{Mostro})}{\sqrt{n}} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n\sqrt{n} \sin(n!) + 8$ [Conta n^2]

Qui comincio a raccogliere:

$$\boxed{n^2} \left(1 - \frac{\sin(n!)}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^2} \right) \rightarrow +\infty \quad [+\infty \cdot (1 - 0 + 0)]$$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 2n + 5}{5n^3 - 6n^2 + 2} = \frac{4}{5}$ [È come fosse $\frac{4n^3}{5n^3}$]

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^3} \left(4 + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left(5 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{4}{5}$$

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n\sqrt{n} + \cos(3n^2)}{n^2 + \sin n + 5} = 0$ È come fosse $\frac{7n\sqrt{n}}{n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n\sqrt{n}} \left(7 + \frac{\cos(3n^2)}{\cancel{n\sqrt{n}}} \right)}{\underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} \cancel{n^2} \left(1 + \frac{\sin n}{n^2} + \frac{5}{n^2} \right)} = \left[\frac{7+0}{+\infty(1+0+0)} = \frac{7}{+\infty} = 0 \right]$$

(carabinieri)

Esempio 12 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{3n} + \sqrt[5]{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Considerando gli $n^{\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3} n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{5}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{1}{2}}} \left(1 - n^{-\frac{1}{6}} \right)}{\cancel{n^{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{3} + n^{-\frac{3}{10}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$